# SEPARATION DER QUANTENEFFEKTE BEI DER COMPTON-STREUUNG IN INTENSIVEN REALISTISCHEN LASER-PULSEN

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

der Fakultät für Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von

Werner Holtmann

aus Sigmaringen

1981

81 411

# SEPARATION DER QUANTENEFFEKTE BEI DER COMPTON-STREUUNG IN INTENSIVEN REALISTISCHEN LASER-PULSEN

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

der Fakultät für Physik
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von

Werner Holtmann

aus Sigmaringen

1981

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

| | |
|---|---|
| Tag der mündlichen Prüfung: | 28. September 1981 |
| Dekan: | Prof. Dr. Rudolf Hübener |
| 1. Berichterstatter: | Prof. Dr. Heinrich Mitter |
| 2. Berichterstatter: | Prof. Dr. Walter Dittrich |

# Abstract

HOLTMANN, WERNER:

SEPARATION DER QUANTENEFFEKTE BEI DER COMPTON-STREUUNG IN INTENSIVEN REALISTISCHEN LASER-PULSEN

Auf drei theoretischen Ebenen wird die Wechselwirkung zwischen einem geladenen Teilchen und einer elektromagnetischen ebenen Welle mit beliebiger Spektralverteilung bei hohen Intensitäten untersucht. Auf der Basis einer Symmetrieanalyse des ebenen Wellenfeldes wird auf der klassischen Ebene die Struktur der Dynamik aufgezeigt. Hierfür wird ein relativistischer Hamiltonformalismus in lichtartiger Form entwickelt. Es wird gezeigt, daß die Dynamik im ebenen Wellenfeld kanonisch äquivalent zur freien Dynamik ist und außerdem zu einer zweidimensionalen nichtrelativistischen Dynamik in einem homogenen zeitabhängigen Feld. Auf der quantenmechanischen Ebene wird die raumzeitliche Ausbreitung von relativistischen Wellenpaketen im ebenen Wellenfeld aufgeklärt. Relativ zu einem beschleunigten Bezugssystem, das mit der Bahn einer klassischen Punktladung durch das Wellenfeld mitbewegt wird, breiten sich diese Wellenpakete wie freie Wellenpakete aus. Es treten keine weiteren quantenmechanischen Effekte auf. Auf der quantenelektrodynamischen Ebene wird der Prozess niedrigster Ordnung, die "Laser-Compton-Streuung" untersucht, bei strenger Berücksichtigung von Streurandbedingungen. Für realistische Pulsformen der ebenen Welle, wie sie für Laser typisch sind, gelingt es, die Quanteneffekte zu separieren. Als einzige Quantenkorrektur tritt eine Compton-Frequenzverschiebung des klassischen Strahlungspektrums auf. Schließlich wird der Grenzübergang zur monochromatischen ebenen Welle durchgeführt, was eine Bestätigung der hierfür bekannten, aber bisher nicht genügend gesicherten Ergebnisse liefert.

Inhaltsverzeichnis


| | | Seite |
|---|---|---|
| 1. | Einleitung | 1 |
| 2. | Die Struktur des äußeren Feldes | 7 |
| 3. | Die Struktur der Dynamik | 15 |
| 4. | Wellenpaket-Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung im Laser-Feld | 26 |
| 5. | Raum-zeitliche Entwicklung von Volkov-Wellenpaketen | 34 |
| 6. | Laser-Compton-Streuung. Darstellung der Observablen | 44 |
| 6.1 | Separation der Quanteneffekte | 49 |
| 6.2 | Transformation auf das mitbewegte Bezugssystem | 54 |
| 6.3 | Einschub über Observable | 56 |
| 6.4 | Strahlungsgeometrie | 57 |
| 6.5 | Observable im Laborsystem | 61 |
| 6.6 | Klassische Rechnung für einen zirkularpolarisierten Puls | 63 |
| 6.7 | Der monochromatische Grenzfall | 68 |
| 7. | Zusammenfassung der Ergebnisse | 72 |
| Anhang 1. | Lichtartige Koordinaten | 75 |
| Anhang 2. | Relativistische kovariante Hamilton-Mechanik | 83 |

Seite

Anhang 3. Die klassische Strahlungsformel 90

Anhang 4. Die quantentheoretische Strahlungsformel 94

Literatur 99

Lebenslauf und Verzeichnis der akademischen Lehrer 103

## 1. Einleitung

In der Physik der starken Felder nimmt in zunehmendem Maß das Wellenfeld eine Sonderstellung ein. Durch die Entwicklung immer leistungstärkerer Laser stehen hier inzwischen Felder zur Verfügung, deren Intensität mehrere Größenordnungen über der anderer Feldkonfigurationen liegt. Wellenfeldkonfigurationen sind daher für die Untersuchung intensitätsabhängiger Effekte besonders aussichtsreich. Für die einfachste Konfiguration, das ebene Wellenfeld, wird eine Vielzahl von nichtlinearen, intensitätsabhängigen Effekten vorausgesagt, die die Wirkungsquerschnitte der quantenelek trodynamischen Prozesse wesentlich verändern (vergl. MITTER 1976). Insbesondere wird für die Compton-Streuung eine intensitätsabhängige Frequenzverschiebung und eine nichtlineare, intensitätsabhängige Abänderung des Klein-Nishina-Wirkungsquerschnitts diskutiert.

Die ebene Welle eignet sich als idealisierte Beschreibung eines Laser-Strahls, solange dessen Wellenfronten "eben" sind über ein Volumen $\lambda^3$. Im optischen Wellenlängenbereich entspricht $\lambda^3$ einem großen Wechselwirkungsvolumen für ein Elementarteilchen, da dessen charakteristische Längeneinheit die Compton-Wellenlänge ist. Als weitere Idealisierung läßt sich eine semiklassische Beschreibung, bei der das Laser-Feld als klassisches äußeres Wellenfeld behandelt wird, rechtfertigen:

- Unter der Voraussetzung, daß der Laser-Strahl sich in einem kohärenten Zustand befindet, ist die semiklassische Beschreibung exakt (KIBBLE 1968).

- Für einen Zustand mit definierter Photonenzahl ist die semiklassische Beschreibung eine gute Näherung, solange in einem quantenelektrodynamischen Prozess nur ein kleiner Anteil der Photonen aus dem Strahl herausgestreut wird. (BIAŁYNICKI - BIRULA 1973)

Beide Aussagen gelten unter der Bedingung $\frac{\hbar\omega}{mc^2} \ll 1$, so daß Strahlungskorrekturen vernachlässigt werden können. Verfügbar sind Laser mit einer Intensität im Fokus von $10^{18}$ W/cm$^2$ bei $\lambda \approx 1\,\mu m$ (Neodym-Glas) und 0,1 nsec Pulslänge. Dem entspricht eine Photonendichte von $10^{21}$ Photonen pro Puls. $\frac{\hbar\omega}{mc^2}$ für ein Elektron im Laserstrahl ist dann von der Größenordnung $10^{-6}$. In diesem Intensitäts- und Wellenlängenbereich stellt die semiklassische Beschreibung eine exzellente Näherung dar.

Der charakteristische Entwicklungsparameter zur Beschreibung der Wechselwirkung eines klassischen ebenen Wellenfeldes mit einem geladenen Teilchen ist $\nu^2 = \left(\frac{e\,a}{mc^2}\right)^2$ mit der Amplitude a des Vektorpotentials. Der dimensionslose Parameter ist abgeschätzt für Elektronen

$$\nu^2 \approx 7{,}5 \cdot 10^{-11}\, I \cdot \lambda^2$$

mit der Laser-Intensität I in W/cm$^2$ und der Laser-Wellenlänge $\lambda$ in cm. Für die beschriebene Anordnung ist $\nu^2 \approx 0{,}7$. Es sind aber für die Fusionsforschung bereits Anordnungen in der Entwicklung mit Intensitäten bis zu $10^{21}$ W/cm$^2$ ("SHIVA" am Lawrence Livermore Laboratory, vergl. WALTZ/MANLEY 1978).
Dann kommt $\nu^2$ in die Größenordnung $10^2$-$10^3$. Eine störungstheoretische Behandlung des äußeren Feldes scheidet aus.

Das ebene Wellenfeld gehört zu den wenigen Feldkonfigurationen, zu denen exakte Lösungen der relativistischen Wellengleichungen für geladene Teilchen in äußeren elektromagnetischen Potentialen bekannt sind (VOLKOV 1935). Eine nichtstörungstheoretische Behandlung des äußeren Feldes ist damit im Rahmen der semiklassischen Beschreibung möglich. Die S-Matrix wird im Furry-Wechselwirkungsbild über die übliche Störungsentwicklung (Entwicklung in $\alpha$!) ausgewertet (vergl. JAUCH/ROHRLICH 1976, chap. 14 f.). Für die Elektronenlinien in den entsprechenden Feynman-Graphen ist dann die exakte Volkov-Lösung für ein Elektron im ebenen Wellenfeld einzusetzen bzw. die entsprechende Green-Funktion (SCHWINGER 1951).

Zur Berechnung der verschiedenen S-Matrix-Elemente wird in der Literatur fastausnahmslos ein monochromatisches ebenes Wellenfeld vorausgesetzt. Dadurch lassen sich die bekannten Methoden für periodische Potentiale anwenden. Als besonders nützlich erweist sich in diesem Zusammenhang ein Quasi-Niveau-Konzept, das auf ZELDOVICH (1966) zurück geht (vergl. Mitter 1975). Physikalisch erscheint der Spezialfall der monochromatischen ebenen Welle zunächst auch als brauchbare Näherung zur Beschreibung eines intensiven Laser-Feldes. Fallen doch selbst für Kurzzeitpulse im Pikosekundenbereich in eine Pulslänge noch ca. 1000 Perioden der Laser-Grundfrequenz.
Von der theoretischen Seite her läßt sich jedoch einwenden, daß im Fall der monochromatischen ebenen Welle, die ja den gesamten Raumzeit-Bereich überdeckt, die Streurandbedingungen für die

S-Matrix verletzt sind.

Tatsächlich hat diese Problematik zu einer langen Kontroverse geführt darüber, ob bei dem quantenelektrodynamischen Prozess niedrigster Ordnung, der Laser-Compton-Streuung, eine intensitätsabhängige Frequenzverschiebung auftritt oder nicht (vergl. Kapitel 4). Die Quintessenz war, daß man, um unzweideutige Ergebnisse zu erzielen, bei den theoretischen Ansätzen sehr sorgfältig auf saubere Streurandbedingungen achten muß. Das bedingt, solange man an der ebenen Welle zur Beschreibung des Laser-Strahls festhält, den Ansatz:

- Für die ebene Welle einen Wellenpuls, der im Unendlichen schnell genug abfällt, entsprechend den realen Verhältnissen in einem Laser-Puls.
- Für die Elektronen Volkov-Wellenpakete, die in drei Dimensionen "geschnürt" sind.

Nur unter diesen Bedingungen erhält man asymptotisch freie ein- und auslaufende Zustände. Auf dieser Basis kann dann ein Grenzübergang zum monochromatischen Fall durchgeführt werden. Allerdings wurde die Konsistenz eines solchen Grenzübergangs von DAWSON und FRIED (1970) in Zweifel gezogen. Diese beiden Autoren machten darüberhinaus anhand einer Modellrechnung deutlich, daß der Laser-Compton-Streuquerschnitt nicht nur intensitätsabhängig, sondern in empfindlicher Weise auch pulsformabhängig ist. Diese Einwände ziehen weitreichende Implikationen nach sich, stellen sie doch zugleich alle theoretischen Ergebnisse für Prozesse höherer Ordnung in Frage, die auf der Basis des monochromatischen Grenzfalls gewonnen wurden.

Die vorgelegte Arbeit hatte das Ziel, diesen kritischen Zusammenhang neu zu diskutieren und insbesondere die Problematik des monochromatischen Grenzfalls aufzuklären. Dazu mußten die Streurandbedingungen für die Laser-Compton-Streuung in der beschriebenen strengen Form berücksichtigt werden. Außerdem sollte für das ebene Wellenfeld eine realistische Pulsform vorgegeben werden. Durch den Verzicht auf ein monochromatisches Wellenfeld wird aufgrund der Nichtlinearität der S-Matrix bzgl. des äußeren Feldes ein qualitativer Wechsel der Methoden notwendig. An die Stelle der Verfahren für periodische Potentiale muß eine Vorgehensweise treten, welche die pulsformunabhängige Symmetrie des ebenen Wellenfeldes möglichst weitgehend ausnutzt. Eine weitere Orientierung hat KIBBLE gegeben (1965; 1968), indem er an einer Abschätzung aufzeigte, daß die Intensitätseffekte im Wesentlichen klassische Effekte sind. Mit dieser methodischen Ausrichtung wird die Wechselwirkung eines geladenen Teilchens mit einem ebenen Wellenpuls auf drei theoretischen Ebenen untersucht, die aufeinander bezogen werden:

- Klassische Ebene: Auf der Basis einer Symmetrieuntersuchung des ebenen Wellenfeldes (Kapitel 2; Anhang 1) wird die Struktur der Dynamik eines geladenen Teilchens im ebenen Wellenfeld analysiert. Um die gemeinsamen Aspekte von klassischer und quantentheoretischer Dynamik zu erfassen, wird ein relativistischer Hamiltonformalismus, der an die Struktur des äußeren Feldes angepaßt ist, entwickelt (Anhang 2; Kapitel 3). Kanonische Transformationen führen zur Aufklärung der Symmetrie der Dynamik.
- Quantenmechanische Ebene: Die raumzeitliche Entwicklung von Wellenpaketlösungen der Klein-Gordon-Gleichung (Spin-Phänomene

können im optischen Bereich vernachlässigt werden) mit einem äußeren Potential in Form eines beliebigen ebenen Wellenfeldes wird aufgeklärt (Kapitel 4; Kapitel 5). Durch den Übergang zu einem beschleunigten Bezugssystem, das der Bahn eines klassischen Teilchens im Wellenpuls folgt, gelingt es, die quantenmechanischen Effekte zu separieren. Über das beschleunigte Bezugssystem ist die Verbindung zur klassischen Ebene hergestellt.

- Quantenelektrodynamische Ebene: Der Prozess niedrigster Ordnung, die Laser-Compton-Streuung, wird analysiert unter strengen Streurandbedingungen und für realistische Pulsformen des ebenen Wellenfeldes. Ausgangspunkt für diese Analyse ist eine Formel für den abgestrahlten Energie-Impuls, die strukturgleich für den quantenelektrodynamischen Prozess und den entsprechenden klassischen Streuprozess gilt (Kapitel 6; Anhang 3; Anhang 4). In die Rechnungen gehen die auf der quantenmechanischen Ebene entwickelten Darstellungen der Volkov-Wellenpakete ein. In dem dort beschriebenen beschleunigten Bezugssystem (momentanes Ruhesystem einer klassichen Punktladung) lassen sich die quantenelektrodynamischen Effekte abseparieren (Kapitel 6.1-6.5). Die Problematik des monochromatischen Grenzfalls verlagert sich vollständig auf die klassische Ebene und wird dadurch aufgelöst. Für den monochromatischen Grenzfall werden die bekannten Ergebnisse reproduziert (Kapitel 6.6-6.7).

## 2. Die Struktur des äußeren Feldes.

Im Rahmen der angegebenen Näherungen beschreiben wir das Laser-Feld als ebenen elektromagnetischen Wellenzug im Vakuum. Die Wellenfront wird geometrisch charakterisiert durch den lichtartigen Vektor

$$n^\mu = (1, \vec{n}) \quad , \quad \vec{n}^2 = 1 \quad , \quad n_\mu n^\mu = 0 \quad , \tag{2.1}$$

wobei der Einheitsvektor $\vec{n}$ die Ausbreitungsrichtung angibt. Das Vektorpotential ist damit (in Lorentz-Eichung)

$$A^\mu(x) = a \sum_{i=1}^{2} e_i^\mu a_i(\xi) \quad , \quad \xi = -n_\mu x^\mu = x^0 - \vec{n}\cdot\vec{x} \tag{2.2}$$

wobei a die maximale Amplitude innerhalb des Laserpulses angibt. Für die beiden Polarisationsvektoren $\underline{e}_i$ gilt

$$e_i^\mu = (0, \vec{e}_i) \quad , \quad e_i^\mu e_{j\mu} = \delta_{ij} \quad , \quad e_i^\mu n_\mu = 0 \quad (i = 1,2) \tag{2.3}$$

$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{n}$ bilden ein rechtshändiges Dreibein.
Der Feldtensor nimmt dann die Form an

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \sum_{i=1}^{2} F_i(\xi) f_i^{\mu\nu} \tag{2.4}$$

mit

$$F_i(\xi) = a \frac{d a_i(\xi)}{d\xi} \quad , \quad f_i^{\mu\nu} = e_i^\mu n^\nu - e_i^\nu n^\mu \quad . \tag{2.5}$$

Die Funktionen $a_i(\xi)$ bestimmen die Wellenstruktur des Laser-Feldes und werden zunächst nicht weiter spezifiziert. Für einen Puls endlicher "Dauer" sind die $a_i(\xi)$ nur in einem endlichen Bereich in $\xi$ von Null verschieden. Es wird also

$$a_i(\xi) = 0 \quad \text{für} \quad \xi \leq \xi_0 \quad \text{bzw.} \quad \xi \geq \xi_1 \quad . \qquad (2.6)$$

Obwohl für eine realistische Beschreibung eines Laserpulses diese Eingrenzung der $a_i(\xi)$ auf ein endliches Intervall zwingend erscheint, wird in nahezu allen konkreten Rechnungen ein monochromatisches Wellenfeld favorisiert

$$a_1(\xi) = \delta \cos \frac{\omega}{c} \xi \quad , \quad a_2(\xi) = (1-\delta^2)^{1/2} \sin \frac{\omega}{c} \xi \quad . \qquad (2.7)$$

Die Konstante $\delta$ bestimmt die Polarisation; lineare Polarisation entspricht $\delta = 0, \pm 1$ und zirkulare Polarisation $\delta = \pm 2^{-1/2}$. Der Vorteil liegt für den Theoretiker in der Periodizität des Vektorpotentials, die eine besonders übersichtliche Interpretation der physikalischen Prozesse im Laserfeld gestattet. (Quasiniveau-Konzept: ZELDOVICH 1966; MITTER 1975). Im Übrigen erwartet man, daß diese Beschreibung eine gute Näherung für die realistischen Verhältnisse ist, da selbst für Pulsdauern im Pikosekundenbereich noch etwa 1000 Perioden in eine Pulslänge fallen. Andererseits hat diese vereinfachte Beschreibung zwei gravierende Nachteile:

- sie steht im Widerspruch zu mathematisch sauberen Streu-Randbedingungen,
- mögliche Ein- und Ausschalteffekte werden nicht erfaßt.

Es ist daher angezeigt, die monochromatische Beschreibung als Grenzfall einer allgemeineren, amplitudenmodulierten Beschreibung zu behandeln.

NEVILLE und ROHRLICH (1971) haben eine Rechtecksmodulation vorgeschlagen

$$a \longrightarrow a\,\theta(\xi - \xi_0)\,\theta(\xi_1 - \xi) \tag{2.8}$$

mit dem Grenzübergang $\xi_0 \longrightarrow -\infty$, $\xi_1 \longrightarrow +\infty$ .
Dies erscheint aber, was die Ein- und Ausschalteffekte angeht, ganz besonders problematisch, da hier der Feldtensor bei $\xi_0$ und $\xi_1$ $\delta$- artige Randspitzen aufweist. Sinnvoller dürfte eine Dämpfungsmodulation sein (KIBBLE 1965; EBERLY/SLEEPER 1968)

$$a \longrightarrow a\,e^{-\gamma|\xi|} \tag{2.9}$$

mit dem Grenzübergang $\gamma \longrightarrow 0$ .
In komplexer Darstellung ist dann

$$A^\mu(x) = \mathrm{Re}\left(\alpha^\mu\, e^{-i\frac{\omega}{c}\xi - \gamma|\xi|}\right) , \tag{2.10}$$

wobei $\alpha^\mu = a\left(0,\ \delta e_1^\mu + (1-\delta^2)^{1/2} e_2^\mu\right)$ .

Die bei dieser theoretischen Pulsform noch auftretende Unstetigkeit im Feldtensor bei $\xi = 0$ kann durch eine geringfügige Veränderung der Amplitude beseitigt werden

$$\alpha^\mu \longrightarrow \alpha^\mu + i\,\varepsilon(\xi)\,\frac{c\gamma}{\omega}\,\mathrm{Re}\,\alpha^\mu \tag{2.11}$$

ohne irgendeinen wesentlichen Einfluß auf die Ergebnisse (KIBBLE 1965).

Ein Ziel der vorliegenden Arbeit war es, Spezialisierungen der beschriebenen Art durchgängig zu vermeiden, um auf diese Weise ein Maximum an pulsform-unabhängiger Information herauspräpa-

rieren und die übrigen physikalisch relevanten Aussagen in so allgemeiner Form zu gewinnen, daß sie jederzeit unmittelbar an realistische, vom Experiment gelieferte Pulsformen angepaßt werden können (etwa durch numerische Auswertungen). Der Rückgriff auf den monochromatischen Grenzfall (2.7) erfolgt dann jeweils nur zum Zweck des Anschlußes an die von anderen Autoren gefundenen speziellen Ergebnisse. Bei allen Rechnungen wird deshalb das Vektorpotential in der Form (2.2) verwendet mit der Beschränkung auf ein endliches Intervall in $\xi$ (2.6) (vergl. Abb. 1).

Der Verzicht auf die mathematischen Vorzüge eines periodischen Potentials macht dann aber eine Problemlösestrategie erforderlich, welche die pulsform-unabhängigen Symmetrien des ebenen Wellenfeldes extensiv ausnutzt: Die Invarianzgruppe des elektromagnetischen Feldtensors einer ebenen Welle ist eine 5-parametrige Untergruppe der Poincaré-Gruppe (JANNER/JANSSEN 1972; THIRRING 1977, § 5.5; KUPERSZTYCH 1978). Zunächst bleibt das Feld invariant bei raumartigen Verschiebungen in Richtung der beiden Polarisationsvektoren und bei der "lichtartigen" Verschiebung in Richtung $x^0 + \vec{n}\cdot\vec{x}$, wie man aus Abbildung 1 ersehen kann. Dazu kommen spezielle Lorentztransformationen, die die Wellenflächen unverändert lassen - also

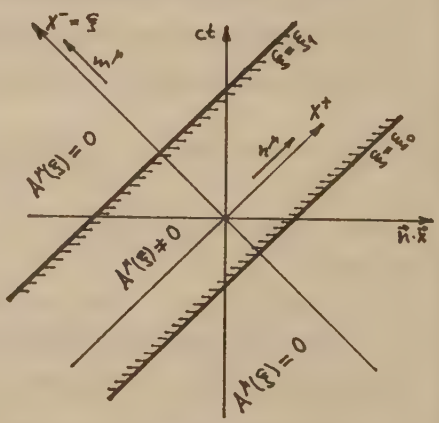


Abb. 1: Symmetrie des ebenen Wellenfeldes.

Elemente der "little group" zu dem lichtartigen Vektor $n^\mu$ (2.1) - bei gleichzeitiger Unterdrückung einer Drehung um die Ausbreitungsrichtung $\vec{n}$ , was im allgemeinen die Polarisation verändern würde. KUPERSZTYCH (1978) hat gezeigt, daß es sich bei einer solchen Invarianztransformation um das Produkt aus einer Boost-Transformation mit der Nebenbedingung

$$1 - \vec{\beta}\cdot\vec{n} = (1-\beta^2)^{1/2} \tag{2.12}$$

und einer Drehung um den Einheitsvektor

$$\hat{\vec{\alpha}} = \frac{\vec{n}\times\vec{\beta}}{|\vec{n}\times\vec{\beta}|} \tag{2.13}$$

und den Drehwinkel

$$\alpha = \pi - 2\arccos\{\beta^{-1}[1-(1-\beta^2)^{1/2}]\} \tag{2.14}$$

handelt. Wir erhalten eine besonders einfache Matrix-Darstellung dieser "Kupersztych-Transformationen" $\Lambda_{(K)}$, wenn wir sie auf lichtartige Koordinaten (vergl. Anhang 1) beziehen. Zu der zentralen Variable unseres Problems $\xi = x^0 - \vec{n}\cdot\vec{x}$ definieren wir ein System unabhängiger Funktionen von $x^\mu$ :

$$\begin{aligned}
x^{\tilde{0}} &= x^0 - \vec{n}\cdot\vec{x} = -n_\mu x^\mu = \xi \quad ; \quad n^\mu = (1,\vec{n}) \\
x^{\tilde{1}} &= \vec{e}_1\cdot\vec{x} = e_{1;\mu}x^\mu \quad ; \quad e_1^\mu = (0,\vec{e}_1) \\
x^{\tilde{2}} &= \vec{e}_2\cdot\vec{x} = e_{2;\mu}x^\mu \quad ; \quad e_2^\mu = (0,\vec{e}_2) \\
x^{\tilde{3}} &= \tfrac{1}{2}(x^0+\vec{n}\cdot\vec{x}) = -m_\mu x^\mu \quad ; \quad m^\mu = \tfrac{1}{2}(1,-\vec{n})
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$n_\mu n^\mu = m_\mu m^\mu = n_\mu e_{1,2}^\mu = m_\mu e_{1,2}^\mu = 0,\ n_\mu m^\mu = -1,\ e_{i;\mu}e_j^\mu = \delta_{ij}\ .$$

Bezogen auf das Vierbein $\{ \underline{m}, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{n} \}$ erhalten wir dann das Vektor-Transformationsverhalten

$$x'^{\tilde{\mu}} = \Lambda^{\tilde{\mu}}_{(k)\,\tilde{\nu}}\, x^{\tilde{\nu}} \tag{2.16}$$

mit

$$\Lambda^{\tilde{\mu}}_{(k)\,\tilde{\nu}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -u_1 & 1 & 0 & 0 \\ -u_2 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(u_1^2+u_2^2) & -u_1 & -u_2 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

Dabei sind $u_1$ und $u_2$ die "transversalen" Komponenten der Vierer-Relativgeschwindigkeit

$$u_{1,2} = \frac{d\Delta x_{\tilde{1},\tilde{2}}}{ds} = \frac{\beta_{\tilde{1},\tilde{2}}}{(1-\beta^2)^{1/2}} \tag{2.18}$$

Während nun der Feldtensor einer ebenen Welle invariant bleibt bei den Transformationen

$$F'^{\mu\nu}(x) = \Lambda^{\mu}_{(k)\,\rho}\, \Lambda^{\nu}_{(k)\,\sigma}\, F^{\rho\sigma}(\Lambda^{-1}_{(k)} x) = F^{\mu\nu}(x) \,, \tag{2.19}$$

nimmt das zugehörige Vektorpotential eine Eichtransformation auf

$$A'^{\mu}(x) = \Lambda^{\mu}_{(k)\,\nu} A^{\nu}(\Lambda^{-1}_{(k)} x) = A^{\mu}(x) + \partial^{\mu}\chi(x) \,. \tag{2.20}$$

Mit Hilfe der Matrix-Darstellung (2.17) können wir $\chi(x)$ einfach bestimmen. Zunächst ist

$$\begin{aligned} A'^{\tilde{\mu}}(\tilde{x}) &= \Lambda^{\tilde{\mu}}_{(k)\,\tilde{\nu}}(u_1,u_2) A^{\tilde{\nu}}(\Lambda^{-1}_{(k)}\tilde{x}) \\ &= (\Lambda^{\tilde{\mu}}_{(k)\,\tilde{\nu}}) \begin{bmatrix} 0 \\ a a_1(x^{\tilde{0}}) \\ a a_2(x^{\tilde{0}}) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a a_1(x^{\tilde{0}}) \\ a a_2(x^{\tilde{0}}) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -u_1 a a_1(x^{\tilde{0}}) - u_2 a a_2(x^{\tilde{0}}) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.21}$$

und somit

$$A'^{\tilde{\mu}}(\tilde{x}) = A^{\tilde{\mu}}(x^{\tilde{o}}) + \partial^{\tilde{\mu}}\chi(x^{\tilde{o}}) \quad mit \quad \chi(x^{\tilde{o}}) = a\int_{x^{\tilde{o}}}^{x^{\tilde{F}}} d\xi \left(u_1 a_1(\xi) + u_2 a_2(\xi)\right) . \tag{2.22}$$

Übertragen auf die ursprünglichen Koordinaten (2.20) wird dann

$$\chi(x) = \chi(\xi) = \int_{\xi_o}^{\xi} d\xi' \, u_\rho A^\rho(\xi') \tag{2.23}$$

(in Übereinstimmung mit KUPERSZTYCH (1978)).

Die Kupersztych-Transformationen hängen von zwei wesentlichen Parametern ab, $u_1$ und $u_2$. Man identifiziert die beiden Generatoren der infinitesimalen Transformationen

$$E_1 = K_1 + J_2 \quad , \quad E_2 = K_2 - J_1 \tag{A1.22, A1.28}$$

(vergl. Anhang 1).

(Bezeichnung analog zu LEUTWYLER/STERN (1978)).

Zum Abschluß dieses Kapitels muß noch ein wichtiger Spezialfall angesprochen werden. Sämtliche Rechnungen werden besonders einfach und übersichtlich, wenn man als äußeres Feld eine monochromatische zirkularpolarisierte ebene Welle vorgibt

$$A^\mu(x) = a\left(\delta e_1^\mu \cos(k\cdot x) + \sqrt{1-\delta^2}\, e_2^\mu \sin(k\cdot x)\right) \tag{2.24}$$

mit $\delta = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Diese Vereinfachungen haben ihre Ursache in der höheren Symmetrie dieses Spezialfalls. Als Invarianzgruppe erhält man eine 6-parametrige Untergruppe der Poincaré-Gruppe (RICHARD 1972). Zu den 5 Generatoren der Invarianzgruppe

des allgemeinen ebenen Wellenfeldes

$$P_1 , P_2 , P_+ , E_1 , E_2 \qquad \text{(vergl. Anhang 1)}$$

kommt der Generator

$$H_+ = J_3 + P_- \qquad \text{für } \delta = +\frac{1}{\sqrt{2}}$$

bzw. (2.25)

$$H_- = J_3 - P_- \qquad \text{für } \delta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

hinzu (vergl. THIRRING 1977, Kap. 5.5).

$H_{\varepsilon(\delta)}$ erzeugt eine Invarianztransformation des Potentials

$$A'^{\mu}(x) = \left(e^{\alpha H_{\varepsilon(\delta)}}\right) A^{\mu}\left(\left(e^{\alpha H_{\varepsilon(\delta)}}\right)^{-1} x\right) = A^{\mu}(x) \qquad (2.26)$$

(vergl. auch BECKER/MITTER 1975, Appendix 2).

## 3. Die Struktur der Dynamik

Die hohe Symmetrie des ebenen Wellenfeldes überträgt sich auf die Dynamik eines geladenen Elementarteilchens in einem intensiven Laserpuls. Alle wesentlichen Aspekte dieses Zusammenhangs lassen sich bereits auf der klassischen Ebene herausarbeiten, wo das Elementarteilchen als Spin-loses geladenes relativistisches Punktteilchen behandelt wird.

Zunächst läßt sich die Bahn eines solchen Teilchens exakt berechnen für beliebige Pulsformen. Dies geschieht in der Literatur entweder durch direkte Integration der Lorentz-Gleichung (z.B.: CHAKRABARTI 1968) oder mit Hilfe des Hamilton-Jakobi-Formalismus (z.B.: LANDAU/LIFSCHITZ 1973, §47; EBERLY/SLEEPER 1968). Um die Strukturelemente der Dynamik aufzudecken, die der klassischen und der quantentheoretischen Beschreibung gemeinsam sind, soll hier jedoch ein kovarianter Hamilton-Formalismus verwendet werden. Da in kovarianter Form die zugehörige Lagrange-Funktion singulär wird (vergl. Anhang 2), führt diese Zielsetzung methodisch in den Bereich der Hamilton-Dynamik mit Nebenbedingungen (engl.: Constrained Hamiltonian Dynamics). DIRAC hat dafür einen allgemeinen Formalismus angegeben (DIRAC 1950, 1964; HANSON/REGGE/TEITELBOIM 1976).

Einen anderen wichtigen Aspekt der kovarianten Hamilton-Dynamik, der mit der relativistischen Kausalität zusammenhängt, hat DIRAC an der Behandlung abgeschlossener Systeme aufgezeigt (DIRAC 1949): Der Zustand eines relativistischen Systems ist

eindeutig bestimmt, wenn entsprechende Anfangsbedingungen auf einer beliebigen Hyperfläche $\sigma$ , die keine zeitartigen Richtungen enthält, festgelegt werden. Im klassischen Bild wird jede Weltlinie eines massiven Systems genau einmal von einer solchen Hyperfläche geschnitten. Man erhält nun verschiedene dynamische Realisierungen der Poincaré-Gruppe, wenn man zunächst nach Untergruppen sucht, die jeweils eine Hyperfläche $\sigma$ invariant lassen. Hat man die Generatoren einer solchen Stabilitätsgruppe $G_\sigma$ gefunden, so ergänzt man durch Kombinationen der restlichen Elemente der Poincaré-Algebra zu einem vollständigen System von unabhängigen Observablen. Die Observablen, die nicht in $G_\sigma$ liegen, transformieren $\sigma$ in eine andere Hyperfläche $\sigma'$ und beinhalten damit die eigentliche Dynamik.

DIRAC hat drei Untergruppen der Poincaré-Gruppe, die transitiv auf einer Hyperfläche $\sigma$ wirken, angegeben und damit drei wesentlich verschiedene Formen einer Poincaré-invarianten Hamiltondynamik,

- die zeitartige Dynamik ("instant form"): $G_\sigma$ ist 6-parametrig und läßt die Hyperebene $x^0 = 0$ invariant,
- die hyperbolische Dynamik ("point form"): $G_\sigma$ ist 6-parametrig und läßt eine Schale des Hyperboloids $-x^2 = a^2 > 0$ , $x^0 > 0$ invariant,
- die lichtartige Dynamik ("front form"): $G_\sigma$ ist 7-parametrig und läßt die lichtartige Hyperebene $x^0 = x^3$ invariant.

Aus der Klassifikation aller Untergruppen der Poincaré-Gruppe entnimmt man, daß noch genau zwei weitere Formen existieren

(LEUTWYLER/STERN 1978), mit 4-parametrigen transitiven Stabilitätsgruppen zu jeweils einer Schale der Hyperboloide
$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = a^2 > 0,\ x^0 > 0$ bzw. $x_0^2 - x_3^2 = a^2 > 0,\ x^0 > 0$ .
Im Unterschied zur nichtrelativistischen Physik, wo genau eine Form der Dynamik existiert mit 9-parametriger Stabilitätsgruppe zur Hyperebene $t = 0$, stehen in der relativistischen Physik also fünf grundsätzlich verschiedene Formen zur Verfügung.

Nun ist zwar das geladene Teilchen in einer ebenen elektromagnetischen Welle ein nichtabgeschlossenes System. Da die Invarianzgruppe des äußeren Feldes isomorph ist zu einer 5-parametrigen Untergruppe der Stabilitätsgruppe von $x^0 = x^3$ (vergl. Anhang 1), wird man dennoch eine Hamilton-Formulierung anstreben, die der beschriebenen lichtartigen Form der Dynamik möglichst nahe kommt. Der allgemeine Dirac-Formalismus für Hamilton-Systeme mit Nebenbedingungen liefert dafür ein geeignetes Instrumentarium.

Wir wollen hier jedoch einen anderen Weg beschreiten: Setzt man bei der homogenen Formulierung der Mechanik an, in der die räumlichen Koordinaten und die Zeit auf derselben formalen Ebene behandelt werden, so kann man einen relativistisch kovarianten Hamilton-Formalismus für ein Teilchen im äußeren Potential in weitgehender Analogie zur nichtrelativistischen Hamilton-Mechanik entwickeln (Anhang 2). Dieser Formalismus entspricht dann natürlich der zeitartigen Form der Dynamik im oben beschriebenen Sinn. Eine lichtartige Form gewinnt man daraus über eine kanonische Transformation. Schließlich kann man zeigen, daß dieser Weg, der speziell auf Probleme mit einzelnen Teilchen in äußeren Potentialen

zugeschnitten wurde, hierbei äquivalent ist zu dem allgemeineren Dirac'schen Zugang.

Der homogene Zugang ist in Anhang 2 ausgeführt. Wir erhalten die kovariante Hamilton-Mechanik in zeitartiger Form

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{\partial H(\lambda)}{\partial p_\mu} \quad , \quad -\frac{dp_\mu}{d\lambda} = \frac{\partial H(\lambda)}{\partial x^\mu} \tag{3.1}$$

mit der Hamiltonfunktion

$$H(\lambda) = \frac{1}{2mc}\sqrt{-\frac{dx_\rho}{d\lambda}\frac{dx^\rho}{d\lambda}}\left\{\left(p_\mu - \frac{e}{c}A_\mu(x)\right)\left(p^\mu - \frac{e}{c}A^\mu(x)\right) + m^2c^2\right\} . \tag{3.2}$$

Die Dynamik ist auf eine 7-dimensionale Hyperfläche des Phasenraums beschränkt durch die Nebenbedingung

$$\left(p_\mu - \frac{e}{c}A_\mu(x)\right)\left(p^\mu - \frac{e}{c}A^\mu(x)\right) + m^2c^2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad H(\lambda) = 0 . \tag{3.3}$$

Die in der Hamilton-Funktion noch auftretenden Geschwindigkeiten können eliminiert werden durch eine spezielle Wahl des Parameters $\lambda$ (vergl. A 2.15, A 2.16), was einer weiteren Nebenbedingung entspricht. Wir wollen jedoch, noch bevor wir diese Wahl treffen, zu einer lichtartigen Form der Hamilton-Mechanik übergehen, die der Struktur des äußeren Wellenfeldes angepaßt ist. Hierzu führen wir eine Punkttransformation des Phasenraums durch, in der Weise, daß die Koordinaten $x^\mu$ in die lichtartigen Koordinaten $x'^\mu = x^{\tilde{\mu}} = (-n_\rho x^\rho, e_{1;\rho}x^\rho, e_{2;\rho}x^\rho, -m_\rho x^\rho)$ übergehen und die kanonischen Impulse $p_\mu$ in entsprechende lichtartige Impulse $p'_\mu$ . Die Kanonizität dieser Punkttransformation ist gewährleistet, wenn wir sie über eine erzeugende Funktion definieren (vergl. A 2.21, A 2.22):

$$F_2(x^\mu, p'_\mu) = -(n_\rho x^\rho)p'_0 + (e_{1;\rho}x^\rho)p'_1 + (e_{2;\rho}x^\rho)p'_2 - (m_\rho x^\rho)p'_3 . \tag{3.4}$$

Damit erhalten wir

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu(x^\nu) \quad , \quad p_\mu \longrightarrow p'_\mu(p_\nu)$$

mit (3.5)

$$x'^\mu = \frac{\partial F_2}{\partial p'_\mu} = x^{\tilde\mu}$$

$$p_\mu = \frac{\partial F_2}{\partial x^{\tilde\mu}} = -m_\mu p'_0 + e_{1;\mu} p'_1 + e_{2;\mu} p'_2 - m_\mu p'_3 \quad ,$$

und man identifiziert

$$p'_\mu = (m^\varrho p_\varrho, e^\varrho_1 p_\varrho, e^\varrho_2 p_\varrho, n^\varrho p_\varrho) = p_{\tilde\mu} \tag{3.6}$$

(vergl. A 1.7).

Zusammen ergibt das die gesuchte Hamilton-Mechanik in lichtartiger Form

$$\frac{dx^{\tilde\mu}}{d\lambda} = \frac{\partial \tilde H(\lambda)}{\partial p_{\tilde\mu}} \quad , \quad -\frac{dp_{\tilde\mu}}{d\lambda} = \frac{\partial \tilde H(\lambda)}{\partial x^{\tilde\mu}} \tag{3.7}$$

mit der Hamiltonfunktion

$$\tilde H(\lambda) = \frac{1}{2mc}\sqrt{-\frac{dx_{\tilde\varrho}}{d\lambda}\frac{dx^{\tilde\varrho}}{d\lambda}}\left\{\left(p_{\tilde\mu} - \frac{e}{c}A_{\tilde\mu}(\tilde x)\right)\left(p^{\tilde\mu} - \frac{e}{c}A^{\tilde\mu}(\tilde x)\right) + m^2c^2\right\} \tag{3.8}$$

Zur Parametrisierung der dynamischen Hyperfläche $\tilde H = 0$ wählen wir aus den lichtartigen kanonischen Koordinaten und Impulsen einen Satz von sieben verallgemeinerten Koordinaten aus $\{x^{\tilde\mu}, p_{\tilde i}\}$. Für $\lambda$ kann man schließlich jeden Parameter wählen, der topologisch äquivalent der Zeit ist, so daß sich die Weltlinie des beschriebenen Teilchens als eineindeutige Funktion dieses Parameters darstellen läßt. Für Teilchen mit Ruhemasse $m > 0$ können wir insbesondere $\lambda = x^{\tilde 0}$ wählen. Nach dieser Festlegung kann man die überflüssigen Koordinaten eliminieren. Zunächst wird

$$1 = \frac{dx^{\tilde 0}}{d\lambda} = \frac{\partial \tilde H}{\partial p_{\tilde 0}} = \frac{\sqrt{-\frac{dx_{\tilde\varrho}}{d\lambda}\frac{dx^{\tilde\varrho}}{d\lambda}}}{mc}\left(p^{\tilde 0} - \frac{e}{c}A^{\tilde 0}(\tilde x)\right) \tag{3.9}$$

Damit eliminieren wir die Geschwindigkeiten aus $\tilde{H}(\lambda)$

$$\tilde{H} = \frac{1}{2(P^{\bar{0}} - \frac{e}{c}A^{\bar{0}}(\vec{x}))}\left\{(P_{\bar{\mu}} - \frac{e}{c}A_{\bar{\mu}}(\vec{x}))(P^{\bar{\mu}} - \frac{e}{c}A^{\bar{\mu}}(\vec{x})) + m^2c^2\right\} \tag{3.10}$$

$$= P_{\bar{0}} - \frac{e}{c}A_{\bar{0}}(\vec{x}) + H(x^{\bar{\mu}}, P_{\bar{i}})$$

mit

$$H(x^{\bar{\mu}}, P_{\bar{i}}) = \frac{\sum_{i=1}^{2}(P_{\bar{i}} - \frac{e}{c}A_{\bar{i}}(\vec{x}))^2 + m^2c^2}{-2(P_{\bar{3}} - \frac{e}{c}A_{\bar{3}}(\vec{x}))} \quad .$$

Als Observable wird man jede auf der Hyperfläche $\tilde{H} = 0$ definierte differenzierbare Funktion f bezeichnen; in unserer Parametrisierung:

$$f = f(x^{\bar{0}}; x^{\bar{i}}, P_{\bar{i}}) \quad .$$

Hierfür erhalten wir nun die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{\partial f}{\partial x^{\bar{\mu}}}\frac{dx^{\bar{\mu}}}{d\lambda} + \frac{\partial f}{\partial P_{\bar{i}}}\frac{dP_{\bar{i}}}{d\lambda} = \frac{\partial f}{\partial x^{\bar{0}}} + \frac{\partial f}{\partial x^{\bar{i}}}\frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_{\bar{i}}} - \frac{\partial f}{\partial P_{\bar{i}}}\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x^{\bar{i}}} \quad ,$$

also (3.11)

$$\frac{df}{dx^{\bar{0}}} = \frac{\partial f}{\partial x^{\bar{0}}} + [f, H]_{x^{\bar{i}}, P_{\bar{i}}}$$

Die Klammern $[a, b] = \frac{\partial a}{\partial x^{\bar{i}}}\frac{\partial b}{\partial P_{\bar{i}}} - \frac{\partial a}{\partial P_{\bar{i}}}\frac{\partial b}{\partial x^{\bar{i}}}$ (3.12)

bilden eine Poisson-Algebra mit den fundamentalen Beziehungen

$$[x^{\bar{i}}, P_{\bar{j}}] = \delta_{\bar{i}\bar{j}} \quad .$$

Im Übrigen kann man nun verifizieren, daß der hier gewählte Zugang zu einer lichtartigen Hamilton-Mechanik einem entsprechenden Vorgehen im Rahmen des allgemeinen Dirac'schen Formalismus äquivalent ist. Man identifiziert $[a, b]_{x^{\bar{i}}, P_{\bar{i}}}$ als Poisson-Realisierung der Dirac-Klammern $[a, b]^*$ zu den beiden Nebenbedingungen "der zweiten Klasse" (engl.: second class contraints), die in die

Rechnung eingeflossen sind. (vergl. HANSON/REGGE/TEITELBOIM 1976, chap. 1,2; SUDARSHAN/MUKUNDA 1974, chap. 3).
Wir wollen nun die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (3.7) lösen im Potential einer ebenen Welle beliebiger Pulsform

$$A^{\mu}(x) = a \sum_{i=1}^{2} e_i^{\mu} a_i(\xi) \tag{2.2}$$

bzw. in lichtartigen Koordinaten

$$A^{\tilde{0}}(\tilde{x}) = A^{\tilde{3}}(\tilde{x}) = 0 \ , \quad A^{\tilde{1},\tilde{2}}(\tilde{x}) = a\, a_{1,2}(x^{\tilde{0}}) \ . \tag{3.13}$$

Die Hamiltonfunktion ist für $\lambda = x^{\tilde{0}} = \xi$

$$\tilde{H}(\xi) = p_{\tilde{0}} + \frac{\sum_{i=1}^{2} (p_{\tilde{i}} - \frac{e}{c} a\, a_i(\xi))^2 + m^2 c^2}{-2 p_{\tilde{3}}} = 0 \tag{3.14}$$

und somit

$$\begin{aligned} \frac{dx^{\tilde{1},\tilde{2}}}{d\xi} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_{\tilde{1},\tilde{2}}} = \frac{p^{\tilde{1},\tilde{2}} - \frac{e a}{c} a_{1,2}(\xi)}{p^{\tilde{0}}} \\ \frac{dx^{\tilde{3}}}{d\xi} &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_{\tilde{3}}} = \frac{\sum_{i=1}^{2} (p^{\tilde{i}} - \frac{e a}{c} a_i(\xi))^2 + m^2 c^2}{2 (p^{\tilde{3}})^2} \\ \frac{dp_{\tilde{i}}}{d\xi} &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x^{\tilde{i}}} = 0 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Wir erhalten also als dynamischen Ausdruck der Symmetrie des Wellenfeldes drei erhaltene kanonische Impulse $p_{\tilde{i}} = \text{const.}$ und können damit die Bewegungsgleichungen integrieren

$$\begin{aligned} x^{\tilde{1},\tilde{2}}(\xi) &= \frac{1}{p^{\tilde{0}}} \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi' \left( p^{\tilde{1},\tilde{2}} - \frac{e a}{c} a_{1,2}(\xi') \right) + x^{\tilde{1},\tilde{2}}(\xi_0) \\ x^{\tilde{3}}(\xi) &= \frac{1}{2(p^{\tilde{0}})^2} \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi' \left[ \sum_{i=1}^{2} (p^{\tilde{i}} - \frac{e a}{c} a_i(\xi'))^2 + m^2 c^2 \right] + x^{\tilde{3}}(\xi_0) \ . \end{aligned} \tag{3.16}$$

Außerdem zeigt sich, daß wegen $c\,d\tau = \sqrt{-\frac{dx^\nu}{d\xi}\frac{dx^\nu}{d\xi}}\,d\xi$ und (3.5)

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{p^\nu}{m} = \frac{-p_\xi}{m} = \text{const.}\,, \tag{3.17}$$

so daß, bei geeigneter Festlegung des Nullpunktes der Eigenzeitskala, $\xi$ proportional zur Eigenzeit des Teilchens ist

$$\xi = \frac{p^\nu}{m}\tau\,. \tag{3.18}$$

Die entscheidende Information über die Struktur der Dynamik eines geladenen Teilchens im ebenen Wellenfeld gewinnt man mit Hilfe einer kanonischen Transformation mit der erzeugenden Funktion

$$F_2(x^\nu, p'_\nu) = p'_\nu x^\nu - \frac{1}{2p'_\xi}\int_{x^\nu_0}^{x^\nu} d\xi\left(2p'_i\frac{eq}{c}a_i(\xi) - \frac{e^2q^2}{c^2}a_i(\xi)a_i(\xi)\right). \tag{3.19}$$

Man erhält die Transformation der kanonischen Koordinaten

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial x^i} = p'_i\,,\quad p_\xi = \frac{\partial F_2}{\partial x^\xi} = p'_\xi - \frac{1}{2p'_\xi}\left(2p'_i\frac{eq}{c}a_i(x^\nu) - \frac{e^2q^2}{c^2}a_i(x^\nu)a_i(x^\nu)\right)$$

also

$$p'_i = p_i\,,\quad p'_\nu = p_\nu + \frac{1}{2p_\xi}\left(2p_i\frac{eq}{c}a_i(\xi) - \frac{e^2q^2}{c^2}a_i(\xi)a_i(\xi)\right)$$

und

$$x'^{i,i} = \frac{\partial F_2}{\partial p'_{i,i}} = x^{i,i} - \frac{1}{p_\xi}\int_{x^\nu_0}^{x^\nu} d\xi\,\frac{eq}{c}a_{i,2}(\xi) = x^{i,i} + \frac{1}{p^\nu}\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi'\,\frac{eq}{c}a_{i,2}(\xi') \tag{3.20}$$

$$x'^\nu = \frac{\partial F_2}{\partial p'_\nu} = x^\nu\,,\quad x'^\xi = \frac{\partial F_2}{\partial p'_\xi} = x^\xi + \frac{1}{2(p_\xi)^2}\int_{x^\nu_0}^{x^\nu} d\xi\left(2p_i\frac{eq}{c}a_i(\xi) - \frac{e^2q^2}{c^2}a_i(\xi)a_i(\xi)\right)$$

$$= x^\xi + \frac{1}{2(p^\nu)^2}\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi'\left(2p^i\frac{eq}{c}a_i(\xi') - \frac{e^2q^2}{c^2}a_i(\xi')a_i(\xi')\right)$$

$$\tilde H'(x', p') = \tilde H\big(x(x', p'), p(x', p')\big) = p'_\nu + \frac{p'_i p'_i + m^2c^2}{-2p'_\xi} = 0. \tag{3.21}$$

Im transformierten System ergeben sich damit die freien kanonischen Bewegungsgleichungen

$$\frac{dx'^{\tilde{i}}}{d\xi'} = \frac{dx'^{\tilde{i}}}{d\xi} = \frac{p'^{\tilde{i}}}{p'^{\tilde{0}}} \quad mit \quad p'^{\tilde{j}} = p'^{\tilde{j}}_{f} = \frac{p'^{\tilde{i}} p'^{\tilde{i}} + m^2 c^2}{2 p'^{\tilde{0}}}$$

$$\frac{dp'^{\tilde{i}}}{d\xi'} = \frac{dp'^{\tilde{i}}}{d\xi} = 0 \quad . \tag{3.22}$$

Die Dynamik im ebenen Wellenfeld ist also kanonisch äquivalent zur freien Dynamik! Die kanonischen Koordianten $x'^{\tilde{\mu}}$, $p'^{\tilde{\nu}}_{\tilde{\nu}}$ bilden eine dynamische Realisierung der Poincaré-Gruppe (vergl. BEERS/ NICKLE 1972 a, b).

Auf der quantenmechanischen Ebene entspricht der kanonischen Transformation (3.19) eine unitäre Transformation (vergl. 5.1), die von CHAKRABARTI (1968) gefunden wurde. Den Zusammenhang dieser hohen Symmetrie der Dynamik mit der Symmetrie des ebenen Wellenfeldes kann man an dem speziellen Fall eines anfangs ruhenden Teilchens verdeutlichen. Die Ausdrücke für die Geschwindigkeit (3.15) vereinfachen sich hierbei

$$\frac{dx^{\tilde{i}}_{1,2}}{d\xi} = -\frac{eq}{mc^2} a_{1,2}(\xi) \quad , \quad \frac{dx^{\tilde{j}}}{d\xi} = \frac{e^2 a^2}{2(mc^2)^2} a_i(\xi) a_i(\xi) + \frac{1}{2} \; ; \; \xi = c\tau . \tag{3.23}$$

Mit Hilfe einer Serie von Kupersztych-Tranformationen (2.17) zu den Relativgeschwindigkeiten $u_{1,2}(s) = \frac{dx^{\tilde{i}}_{1,2}(\xi = s)}{ds}$ kann man auch im Wellenfeld auf das momentane Ruhesystem dieses Teilchens transformieren. Die kanonische Transformation auf das freie Problem entspricht hier also einer Beschleunigungstransformation auf das mitbewegte Bezugssystem, die von Invarianztransformationen des Feldes erzeugt wird! (vergl. KUPERSZTYCH 1976, 1978).

In einer anderen kanonischen Transformation spiegelt sich die Verwandtschaft der lichtartigen Dynamik mit der Galilei-Dynamik in zwei Dimensionen wider (vergl. Anhang 1). Die erzeugende Funktion

$$F_2(x^{\tilde{\mu}}, p'_{\tilde{\nu}}) = p'_{\tilde{\nu}} x^{\tilde{\nu}} + x^i \frac{eq}{c} a_i(x^{\tilde{\nu}}) \qquad (3.24)$$

führt zu der mechanischen Eichtransformation

$$\begin{aligned} x'^{\tilde{\mu}} &= x^{\tilde{\mu}} \\ p'_{\tilde{0}} &= p_{\tilde{0}} - x_i \frac{eq}{c} \frac{d}{d\xi} a_i(\xi) \\ p'_{\tilde{1},\tilde{2}} &= p_{\tilde{1},\tilde{2}} - \frac{eq}{c} a_{1,2}(\xi) \quad , \quad p'_{\tilde{3}} = p_{\tilde{3}} \\ \tilde{H}' &= p'_{\tilde{0}} + \frac{p'_i p'_i}{-2p'_{\tilde{3}}} - x'_i F_i(\xi) + \frac{m^2 c^2}{-2p'_{\tilde{3}}} \; ; \; F_i(\xi) = -\frac{eq}{c} \frac{d}{d\xi} a_i(\xi) . \end{aligned} \qquad (3.25)$$

Dies entspricht, wenn man $-p'_{\tilde{3}} = p'^{\tilde{0}} = M$ als Massenparameter interpretiert, der zweidimensionalen Dynamik eines nichtrelativistischen Teilchens in einem homogenen zeitabhängigen Feld $\frac{q}{c} \frac{d}{d\xi} a_i(\xi)$ ; $\xi$ entspricht der Zeit. (Dieses Problem wurde von KOHLER (1966) behandelt und kann als Modell für das relativistische Problem in der ebenen Welle angesehen werden.)

Nach der allgemeinen strukturellen Analyse der Dynamik soll nun noch die konkrete Teilchenbahn für den Grenzfall der monochromatischen ebenen Welle angegeben werden. Die Koordinatenachsen seien so orientiert, daß die Ausbreitungsrichtung $\vec{n}$ des Laser-Feldes mit der 3-Achse zusammenfällt (vergl. Anhang 1). Die Anfangsbedingungen sollen einem anfangs, d.h. vor der Wechselwirkung mit dem Laser-Feld ruhenden Teilchen entsprechen. Danach

ist $p^1 = p^2 = 0$, $p^- = p^0 = mc$ . Im monochromatischen Grenzfall erhält man dann bei geeigneter Wahl der Anfangswerte für den Ort des Teilchens:

Linearpolarisiertes Wellenfeld: $A^1(\xi) = a \cos\frac{\omega}{c}\xi$ , $A^2(\xi) = 0$

$$x^1(\xi) = -\frac{ea}{mc^2}\frac{c}{\omega}\sin\frac{\omega}{c}\xi \quad , \quad x^2(\xi) = 0$$

$$x^3(\xi) = \frac{e^2a^2}{4(mc^2)^2}\xi + \frac{e^2a^2}{8(mc^2)^2}\frac{c}{\omega}\sin 2\frac{\omega}{c}\xi \quad , \quad x^0(\xi) = x^3(\xi) + \xi \tag{3.26}$$

Zirkularpolarisiertes Wellenfeld: $A^1(\xi) = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\frac{\omega}{c}\xi$, $A^2(\xi) = \frac{a}{\sqrt{2}}\sin\frac{\omega}{c}\xi$

$$x^1(\xi) = \mp\frac{ea}{\sqrt{2}mc^2}\frac{c}{\omega}\sin\frac{\omega}{c}\xi \quad , \quad x^2(\xi) = \frac{ea}{\sqrt{2}mc^2}\frac{c}{\omega}\cos\frac{\omega}{c}\xi$$

$$x^3(\xi) = \frac{e^2a^2}{4(mc^2)^2}\xi \quad , \quad x^0(\xi) = x^3(\xi) + \xi \tag{3.27}$$

Man erhält also oszillierende Bewegungen, die sich einer Driftbewegung entlang der Ausbreitungsrichtung des Wellenfeldes mit der gemittelten Geschwindigkeit $\overline{\frac{dx^3}{ds}} = \frac{e^2a^2}{4(mc^2)^2}$ überlagern. Transformiert man auf das entsprechende mittlere Ruhesystem, so erhält man periodische Bewegungen:

- im linearpolarisierten Fall eine Bewegung in der 1-3-Ebene in Form einer Achterschleife,
- im zikularpolarisierten Fall eine Kreisbewegung in der 1-2-Ebene (vergl. SARACHIK/SCHAPPERT 1970; THIRRING 1977 § 5.5).

## 4. Wellenpaket-Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung im Laser-Feld

Die quantentheoretische Beschreibung der Dynamik geladener Elementarteilchen in einem ebenen elektromagnetischen Wellen-Feld hat bereits eine lange Geschichte. Schon 1935 hat VOLKOV exakte Eigenlösungen der zu diesem Problem gehörenden Dirac-Gleichung angegeben für beliebige Pulsformen des ebenen Wellen-Feldes. Ein breites Interesse fanden die Volkov-Lösungen nachdem mit der Entwicklung von Lasern intensive kohärente Lichtquellen zur Verfügung standen. Bei der Behandlung quantenelektrodynamischer Prozesse in starken Laser-Feldern zeichneten sich nichtlineare intensitätsabhängige Effekte ab (vergl. die Übersichtsartikel: EBERLY 1968; MITTER 1975). Insbesondere beim einfachsten Prozeß, der Laser-Compton-Streuung (engl. High-Intensity Compton Scattering) entwickelte sich in diesem Zusammenhang jedoch eine anhaltende Kontroverse:

- in einer semiklassischen Rechnung, bei der der Laserstrahl als klassisches äußeres Feld behandelt wird, fanden BROWN und KIBBLE (1964) und unabhängig davon GOLDMAN (1964) auf der Basis der Volkov-Lösungen eine intensitätsabhängige Frequenzverschiebung in Abänderung des normalen Compton-Effekts.
- FRIED und EBERLY (1964) bestritten diesen Effekt. Sie arbeiteten nicht semiklassisch mit den Volkov-Lösungen, sondern summierten bei adiabatischen Randbedingungen äußere Photonlinien zu allen Ordnungen auf.
- als Antwort darauf erläuterte KIBBLE (1965), daß das Auftreten der intensitätsabhängigen Frequenzverschiebung nicht an der semiklassischen Näherung liegt, sondern an der Vorgabe von

Streurandbedingungen mit freien ein- und auslaufenden Elektronen.

In der Tat ist die semiklassische Beschreibung exakt, wenn sich der Laserstrahl in einem kohärenten (Glauber-) Zustand befindet (FRANTZ 1965; KIBBLE 1968). Liegt andererseits ein Strahl mit definierter Photonenzahl vor, so ist die semiklassische Beschreibung bei den hohen Photonendichten von intensiven Laserpulsen eine exzellente Näherung (BIAŁYNICKI-BIRULA 1973). Nachdem die semiklassische Beschreibung theoretisch abgesichert war, setzte eine Debatte über die Konsistenz der Volkov-Lösungen mit Streurandbedingungen ein:

- FRIED, BAKER und KORFF (1966) wiesen darauf hin, daß Volkov-Lösungen unter aufgeprägten Streurandbedingungen inkompatibel sind mit einer unitären Zeitentwicklung der Zustandsvektoren. In der Konsequenz argumentierten sie, daß die Impulsparameter, die in den Volkov-Lösungen auftreten, nicht mit den Impulsen der freien einlaufenden bzw. auslaufenden Teilchen identifiziert werden dürfen.
- MEYER (1970) führte daraufhin eine mathematisch strenge Behandlung der Streurandbedingungen durch. Vorausgesetzt wird für die ebene elektromagnetische Welle eine Pulsform, die hinreichend schnell gegen Null geht für $\xi \to \pm\infty$ . Für normierte ein- und auslaufende Zustände läßt sich dann die LSZ-Asymptotenbedingung verifizieren; was eine eindeutige Interpretation der Wellenfunktionen erlaubt. Insbesondere zeigt der Grenzübergang von Volkov-Wellenpaketlösungen zu Volkov-Eigenlösungen, daß der auftretende Impulsparameter den Impuls des Teilchens vor der Wechselwirkung mit dem Laserstrahl angibt, in Aufhebung

der obigen Argumentation.

- durch Einführung lichtartiger Koordinaten gelang es NEVILLE und ROHRLICH (1968, 1971) Volkov-Wellenpaketlösungen in expliziter Fourier-Darstellung zu konstruieren. Anstelle der sonst üblichen Paketierung in den drei räumlichen Richtungen $x^i$ bei konstantem $x^o$ tritt in Anpassung an die Symmetrie des äußeren Feldes eine äquivalente Paketierung in den drei Richtungen $x^{\tilde{i}}$ bei konstantem $x^{\tilde{o}}$ auf. In dieser Form können die freien ein- und auslaufenden Wellenpakete problemlos an den Wechselwirkungsbereich angeschlossen werden. Darüberhinaus wird der Widerspruch zwischen unitärer Zeitentwicklung und Streurandbedingungen aufgehoben. Entsprechend der Logik einer lichtartigen Dynamik liegt eine unitäre Entwicklung der Volkov-Streuzustände zwischen benachbarten lichtartigen Hyperebenen $x^{\tilde{o}}$ = const. vor. Auf dieser Basis konnten NEVILLE und ROHRLICH die vorausgesagte intensitätsabhängige Frequenzverschiebung für eine Rechteck-Pulsform des äußeren Potential bestätigen.

Damit war nun die zweite Runde der theoretischen Auseinandersetzung zugunsten semiklassischer Rechnungen mit geeigneten Volkov-Lösungen entschieden. Hier setzte jedoch ein weiterer Einwand an, der bisher unbeantwortet geblieben ist:
Anhand einer Eichinvarianz-Betrachtung für Störungsentwicklungen der semiklassischen Streuamplituden argumentierten DAWSON und FRIED (1970), daß der monochromatische Limes (bzgl. des äußeren ebenen Wellenfeldes) dieser Amplituden nicht existiere (vergl. auch KUPERSZTYCH 1978). Sie zeigten dann, daß die Frequenzver-

teilung der gestreuten Photonen nicht nur von der Intensität, sondern auch in sensibler Weise von der Pulsform des Laser-Feldes abhängt. Eine Rechteck-Pulsform, wie sie NEVILLE verwendet hatte, erschien in diesem Zusammenhang nicht akzeptabel wegen unkontrollierbarer Ein- und Ausschalteffekte (vergl. Kapitel 2). Damit wurde nun zwar die Existenz einer intensitätsabhängigen Frequenzverschiebung nicht mehr in Zweifel gezogen, wohl aber die speziellen Ausdrücke hierfür, die BROWN und KIBBLE angegeben hatten. Dies bräuchte kein Punkt weiterer Diskussionen zu sein, solange eine Messung des Effekts noch aussteht. Da aber alle Rechnungen für Prozesse höherer Ordnung mit einer monochromatischen ebenen Welle als äußerem Feld arbeiten (vergl. MITTER 1975), besteht ein fundamentales Interesse daran, dem monochromatischen Limes einen eindeutigen physikalischen Sinn zu geben.

Aus der skizzierten Problemgeschichte liest man den geeigneten methodischen Ansatzpunkt für diese Fragestellung ab: Die Volkov-Wellenpaketlösungen von NEVILLE und ROHRLICH ermöglichen eine explizite Kontrolle der Streurandbedingungen. Dazu gibt man eine kompakte Pulsform für das äußere Feld vor, die zunächst nicht weiter spezifiert wird (2.6).

Da Spin-Phänomene im optischen Bereich vernachlässigt werden können, gehen wir von der Klein-Gordon-Gleichung für ein "skalares Elektron" aus. Bezogen auf lichtartige Koordinaten ist

$$K_x^A \varphi(\tilde{x}) = \left[(\partial_\mu - i e A_\mu(\tilde{x}))(\partial^\mu - i e A^\mu(\tilde{x})) - \varkappa^2\right] \varphi(\tilde{x}) = \tag{4.1}$$

$$\left[-2\frac{\partial^2}{\partial x^+ \partial x^-} + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^i} - 2ie\varkappa a_i(\xi)\frac{\partial}{\partial x^i} - \varepsilon^2 a^2 a_i(\xi) a_i(\xi) - \varkappa^2\right] \varphi(\tilde{x}) = 0$$

mit

$$\varepsilon = \frac{e}{\hbar c} \quad , \quad \varkappa = \frac{mc}{\hbar} \quad , \quad \xi = x^- \quad .$$

Die Fourier-Transformation der Klein-Gordon-Gleichung bzgl. der drei Komponenten $x^{\tilde{i}}$ liefert

$$\mathcal{F}\left[K_x^A \varphi(\tilde{x})\right](p_{\tilde{i}}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\tilde{x} \left[K_x^A \varphi(\tilde{x})\right] e^{-i p_{\tilde{i}} x^{\tilde{i}}} \tag{4.2}$$

$$= \left\{-2i p_+ \frac{\partial}{\partial x^-} - p_i p_i + 2e\varkappa a_i(\xi) p_i - \varepsilon^2 a^2 a_i(\xi) a_i(\xi) - \varkappa^2\right\} \varphi(\xi | p_{\tilde{i}}) = 0$$

mit

$$\varphi(\xi | p_{\tilde{i}}) = \mathcal{F}\left[\varphi(\tilde{x})\right](p_{\tilde{i}}) \quad . \tag{4.3}$$

Wir erhalten die einfache Differentialgleichung für $\varphi(\xi | p_{\tilde{i}})$

$$\frac{d}{d\xi} \varphi(\xi | p_{\tilde{i}}) - i D(\xi | p_{\tilde{i}}) \varphi(\xi | p_{\tilde{i}}) = 0 \tag{4.4}$$

mit $D(\xi | p_{\tilde{i}}) = \frac{1}{2p_+}\left\{p_i p_i + \varkappa^2 - 2e\varkappa a_i(\xi) p_i + \varepsilon^2 a^2 a_i(\xi) a_i(\xi)\right\}$

und der allgemeinen Lösung

$$\varphi(\xi | p_{\tilde{i}}) = f(\xi_0 | p_{\tilde{i}})\, e^{i \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi' D(\xi' | p_{\tilde{i}})} \quad . \tag{4.5}$$

Die Invertierung der Fourier-Transformation führt dann zu

$$\varphi(\tilde{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\bar{p}\, f(\xi_0 | p_{\tilde{i}})\, e^{i \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi' D(\xi' | p_{\tilde{i}})}\, e^{i p_{\tilde{i}} x^{\tilde{i}}} \quad , \tag{4.6}$$

wobei $d^3\bar{p} = -dp_1 dp_2 dp_+ = dp^- dp^1 dp^2$ . (4.7)

Diese allgemeine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung (4.1) soll bei $\xi = \xi_0$ an ein freies einlaufendes Wellenpaket angeschlossen werden, da wir voraussetzen, daß $a_i(\xi) = 0$ für $\xi \leq \xi_0$. Die invariante Fourier-Darstellung eines freien Klein-Gordon-Wellenpakets läßt sich unmittelbar auf lichtartige Koordinaten umschreiben

$$f(\tilde{x}) = \frac{\sqrt{\hbar c}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4\tilde{p}\, \delta(p_\mu p^\mu + \varkappa^2)\, g(\tilde{p})\, e^{i p_\mu x^\mu} \quad , \tag{4.8}$$

wobei $g(\tilde{p})$ nur auf der Massenschale eindeutig definiert ist. (Zur Normierung vergl. Anhang 4).

Auf der Massenschale gilt die Beziehung

$$p^0 = \tfrac{1}{2} p^- + p^+ = \tfrac{1}{2} p^- \left(1 + \frac{p^i p^i + \varkappa^2}{(p^-)^2}\right) \quad . \tag{4.9}$$

$p^-$ hat also stets dasselbe Vorzeichen wie $p^0$ und wir erhalten die lichtartige Aufspaltung nach positiven und negativen Frequenzen

$$\begin{aligned} f_\pm(\tilde{x}) &= \frac{\sqrt{\hbar c}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4\tilde{p}\, \frac{\theta(\pm p^-)}{2|p^-|}\, \delta\left(p^+ - \frac{p^i p^i + \varkappa^2}{2p^-}\right) e^{i p_\mu x^\mu} \\ &= \frac{\sqrt{\hbar c}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\bar{p}\, \frac{1}{2|p^-|}\, g_\pm(\bar{p})\, e^{-i(p_f^+ x^- + p^- x^+ - p^i x^i)} \end{aligned} \tag{4.10}$$

mit

$$p_f^+ = \frac{p^i p^i + \varkappa^2}{2p^-} \quad , \quad \bar{p} = (p^-, p^1, p^2) \quad , \quad g_\pm(\bar{p}) = \theta(\pm p^-)\, g(p^-, p^i, p_f^+) \tag{4.11}$$

Wir können nun nach einem vollständigen Orthogonalsystem normierter Lösungen entwickeln: $f_\pm(\tilde{x}) = \sum_\alpha C_\alpha f_{\alpha\pm}(\tilde{x})$

$$f_{\alpha\pm}(\tilde{x}) = \frac{\sqrt{\hbar c}}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\bar{p}}{2|p^-|}\, h_{\alpha\pm}(\bar{p})\, e^{-i(p_f^+ x^- + p^- x^+ - p^i x^i)} \quad . \tag{4.12}$$

$h_{\alpha+}(\bar{p})$ bzw. $h_{\alpha-}(\bar{p})$ verschwinden für $p^- < 0$ bzw. $p^- > 0$ und erfüllen, bezogen auf das invariante Maß $\frac{d^3\bar{p}}{2|p^-|}$, die Orthonormalitätsrelation

$$(h_{\alpha\varepsilon}(\bar{p}),\ h_{\beta\varepsilon}(\bar{p})) = \int \frac{d^3\bar{p}}{2|p^-|}\, h^*_{\alpha\varepsilon}(\bar{p})\, h_{\beta\varepsilon}(\bar{p}) = \delta_{\alpha\beta} \qquad (4.13)$$

und die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{\alpha} h_{\alpha\varepsilon}(\bar{p})\, h^*_{\alpha\varepsilon}(\bar{p}') = 2|p^-|\,\theta(\varepsilon p^-)\,\delta(p^- - p'^-)\,\delta_2(p^i - p'^i) \qquad (4.14)$$

(Vorzeichensymbol $\varepsilon = \pm$).

Die $f_{\alpha\varepsilon}(\tilde{x})$ sind dann orthonormal in Bezug auf das innere Produkt auf der lichtartigen Hyperfläche $x^{\tilde{0}} = x^- = \text{const}$.

$$(f_{\alpha\varepsilon}(\tilde{x}),\ f_{\beta\varepsilon'}(\tilde{x})) = \frac{-i}{\hbar c} \int d^3\tilde{x}\, f^*_{\alpha\varepsilon}(\tilde{x})\, \overleftrightarrow{\partial^{\tilde{x}}}\, f_{\beta\varepsilon'}(\tilde{x}) = \varepsilon\, \delta_{\varepsilon\varepsilon'}\, \delta_{\alpha\beta}\ ,$$

$$\text{wobei}\quad \overleftrightarrow{\partial^{\tilde{x}}} = \overrightarrow{\partial^{\tilde{x}}} - \overleftarrow{\partial^{\tilde{x}}} = -\left(\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^+} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^+}\right)\ . \qquad (4.15)$$

Sie erfüllen die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{\alpha} f_{\alpha\varepsilon}(\tilde{x})\, f^*_{\alpha\varepsilon}(\tilde{x}') = \frac{\hbar c}{i}\, \varepsilon\, \Delta_\varepsilon(\tilde{x} - \tilde{x}')\ . \qquad (4.16)$$

Schließt man nun bei $\xi = \xi_0$ die allgemeine Lösung im äußeren Wellenfeld (4.6) an die freien (einlaufenden) Wellenpakete (4.12) an: $\varphi(\tilde{x})\big|_{\xi=\xi_0} = f_{\alpha\varepsilon}(\tilde{x})\big|_{\xi=\xi_0}$, so erhält man über die Anschlußbedingung

$$f(\xi_0 | p_i^+) = \frac{\sqrt{\hbar c}}{2|p^-|}\, h_{\alpha\varepsilon}(\bar{p})\, e^{-i p_+^+ \xi_0} \qquad (4.17)$$

ein vollständiges Orthogonalsystem normierter Volkov-Lösungen

$$\varphi^{ext.}_{\alpha\varepsilon}(\tilde{x}) = \frac{\sqrt{\hbar c}}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\bar{p}}{2|p^-|}\, h_{\alpha\varepsilon}(\bar{p})\, e^{-i(p_+^+ x^- + p^- x^+ - p^i x^i)}\, e^{\frac{i}{2p^-}\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi' (2p^i e a_i(\xi') - e^2 a^i a_i(\xi'))} \qquad (4.18)$$

Entscheidend für diese Möglichkeit der Konstruktion von Volkov-Wellenpaketlösungen, die Streurandbedingungen erfüllen, ist die Erhaltung der drei Impulse $\hbar p_{\tilde{i}}$ , die aus der Translationsinvarianz des äußeren Wellenfeldes in den Richtungen $x^{\tilde{i}}$ folgt (vergl. Kapitel 2). Damit sind die Verteilungen $h_{\lambda\sigma}(\bar{p})$ außerhalb und innerhalb des Wechselwirkungsbereichs konstant. Demzufolge führt man den Grenzübergang zu scharfen Anfangsimpulsen an diesen drei erhaltenen Impulskomponenten durch

$$h_{\lambda\sigma}(\bar{p}) \longrightarrow \sqrt{2|p^-|}\,\delta(p^- - p_\lambda^-)\,\delta_\sigma(p^i - p_\lambda^i) \quad . \tag{4.19}$$

Dadurch erhält man in eindeutiger Weise entsprechende Volkov-Eigenlösungen.

## 5. Raum-zeitliche Entwicklung von Volkov-Wellenpaketen

Durch die Kenntnis einer Fourier-Darstellung der Volkov-Wellenpaketlösungen (4.18) könnte man versucht sein, sich die weitergehende Kenntnis der raumzeitlichen Entwicklung dieser Wellenpakete über eine direkte Ausführung der Fourier-Integrale zu verschaffen, um so zu einer endgültigen Klärung des monochromatischen Grenzfalls zu gelangen. Die direkte Strategie erscheint aber gegenwärtig völlig aussichtslos, da - im Gegensatz zur nichtrelativistischen Quantenmechanik - eine analytische Integration selbst einfachster freier Klein-Gordon-Wellenpakete nicht geleistet worden ist! Man scheitert einfach an den Integralen, was jedoch nur ein technischer Ausdruck ist für die strukturelle Problematik der relativistischen Quantenmechanik, die mit der Nichtexistenz eines diagonalen Ortsoperators zusammenhängt und bereits die freie Theorie kennzeichnet.

Aussichtsreicher erscheint daher eine indirekte Strategie, bei der man die Relation zwischen den raumzeitlichen Entwicklungen von Volkov-Wellenpaketen und entsprechenden freien Wellenpaketen aufzudecken versucht, ohne die Ausbreitung der freien Pakete weiter zu analysieren. Man darf dabei erwarten, daß sich die kanonische Äquivalenz von freier Dynamik und Dynamik im ebenen Wellenfeld (vergl. Kapitel 3) in dieser quantenmechanischen Relation widerspiegeln wird.

Tatsächlich hat CHAKRABARTI (1968) die unitäre Äquivalenz von Volkov-Problem und freiem Problem gezeigt. Sie wird vermittelt durch den unitären Operator

$$U = \exp\left[\frac{i}{2P^-}\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi' \left(2P^i e a a_i(\xi') - e^2 a^2 a_i(\xi') a_i(\xi')\right)\right] \qquad (5.1)$$

mit $P^- = \frac{1}{i}\partial^-$, $P^i = \frac{1}{i}\partial^i$ in der Ortsdarstellung. (Vergl. die erzeugende Funktion (3.19)).

Die transformierten Operatoren $P' = UPU^{-1}$, $X' = UXU^{-1}$ bilden eine dynamische Realisierung der Poincaré-Algebra (vergl. auch BEERS/NICKLE 1972 a,b). CHAKRABARTI konnte zeigen, daß der Schwerpunkt eines schmalen (im Impulsraum) Volkov-Wellenpakets der Bahn eines klassischen Punktteilchens im ebenen Wellenfeld folgt. KUPERSZTYCH (1978) hat dann den Operator aus einer Folge von "Lorentz-Typ Operatoren" rekonstruiert, die den Feldtensor $F^{\mu\nu}$ (2.4) invariant lassen und somit verallgemeinerten Eichtransformationen entsprechen. Damit ist die Struktur der Dynamik auf der quantenmechanischen Ebene weitgehend aufgedeckt. Für eine detaillierte Analyse der raumzeitlichen Entwicklung von Volkov-Wellenpaketen sind diese Untersuchungen jedoch von begrenztem Nutzen, da für den Operator U nur die Wirkung auf Eigenzustände explizit bekannt ist.

Hier führt eine direkte Untersuchung der Fourier-Darstellung (4.18) mit Hilfe von Umformungen und Entwicklungen weiter. Wir beschränken uns dabei auf die Lösungen mit positiven Frequenzen. Zunächst erhält man durch einfache Erweiterungen und Umordnungen der Exponenten in (4.18)

$$\varphi^{ext.}_{\lambda+}(\vec{x}) = \frac{\sqrt{\hbar c}}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^2\vec{p}}{2p^-} h_{\lambda+}(\vec{p})\, e^{\frac{ie}{\hbar c}\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi' \mp i(\xi'|\vec{p}) A^i_{ext}(\xi')} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}\left\{p^+_f x^- + p^-(x^+ - \Delta r^+(\xi|\vec{p})) - p^i(x^i - \Delta r^i(\xi|\vec{p}))\right\}} \qquad (5.2)$$

mit

$$\Delta r^+(\xi|\bar p) = -\frac{1}{2(p^-)^2}\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi'\,(2p^i e A^i_{ext}(\xi') - e^2 A^i_{ext}(\xi')A^i_{ext}(\xi')) = -\frac{1}{2(p^-_{kl})^2}\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi'\,(2p^i_{kl}\tfrac{e}{c}A^i(\xi') - \tfrac{e^2}{c^2}A^i(\xi')A^i(\xi'))$$

$$\Delta r^i(\xi|\bar p) = -\frac{1}{p^-}\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi'\, e A^i_{ext}(\xi') = -\frac{1}{p^-_{kl}}\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi'\,\tfrac{e}{c}A^i(\xi') \qquad (5.3)$$

$$\dot r^i(\xi|\bar p) = \frac{d}{d\xi} r^i = \frac{p^i - eA^i_{ext}(\xi)}{p^-} = \frac{p^i_{kl} - \frac{e}{c}A^i(\xi)}{p^-_{kl}}$$

(Da $h_{++}(\bar p)=0$ für $p^- < 0$ , kann man den Integrationsbereich beschränken: $\int \frac{d^3\bar p}{2|p^-|} h_{++}(\bar p)\ldots = \int_0^\infty \frac{dp^-}{2p^-}\int d^2p^i\, h_{++}(\bar p)\ldots = \int_+ \frac{d\bar p}{2p^-} h_{++}(\bar p)\ldots$ ).
Diese Form der Lösungen zeigt den Zusammenhang der Fourier-Komponenten (Volkov-Eigenlösungen) mit der Bewegung klassischer Ladungen im ebenen Wellenfeld relativ zu den Bahnen entsprechender freier Teilchen. Man identifiziert die Impulskomponenten $\hbar p^-$, $\hbar p^i$ der Fourier-Entwicklung mit den erhaltenen kanonischen Impulsen $p^-_{kl}$ , $p^i_{kl}$ der klassischen Bahnen.

Eine sehr viel weiter reichende Aufklärung der Relation zwischen Volkov-Paketlösungen und freien Wellenpaketen erhält man über eine Entwicklung der Fourier-Komponenten um feste gemeinsame Wellenvektorkomponenten $p^- = p^-_0$ , $p^i = p^i_0$ . Um diese Entwicklung parallel an Volkov-Lösungen und an entsprechenden freien Lösungen durchführen zu können, gehen wir von der gemeinsamen Form der Lösungen aus:

$$\varphi_+(\bar x) = \frac{\sqrt{\hbar c}}{(2\pi)^{3/2}}\int_+ d^3\bar p\; h_+(\bar p)\, e^{-i(p^+_+\xi_0 + p^- x^+ - p^i x^i)}\,\frac{1}{2p^-}\, e^{-\frac{i}{2p^-}\chi(\xi,\xi_0|p^i)}$$

mit (5.4)

$$\chi(\xi,\xi_0|p^i) = \chi_f(\xi,\xi_0|p^i) = (p^i p^i + \varkappa^2)(\xi-\xi_0) \qquad \text{für freie Lösungen}$$

$$\chi(\xi,\xi_0|p^i) = \chi_v(\xi,\xi_0|p^i) = \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi'\Big[\sum_{i=1}^{2}(p^i - eA^i(\xi'))^2 + \varkappa^2\Big] \qquad \text{für Volkov-Lösungen}$$

Wegen $A^i(\xi)=0$ für $\xi \neq \xi_0$ gehen die beiden Phasen an der Stelle $\xi = \xi_0$ ineinander über.

$\chi(\xi,\xi_0|p^i)$ ist eine quadratische Form in $p^i$. Die Taylor-Entwicklung von $\chi$ um $p_0^i$ bricht daher nach der zweiten Ordnung ab, analog der Entwicklung bei einem Schrödinger-Wellenpaket.

$$\frac{1}{2p^-} e^{-\frac{i}{2p^-}\chi(\xi,\xi_0|p^i)} = \frac{1}{2p^-} e^{-\frac{i\alpha}{2p^-}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{-i(\xi-\xi_0)}{2p^-}\right)^n \left[(p^i-p_0^i)(p^i-p_0^i)\right]^n$$

mit (5.5)

$$\alpha = \alpha_f = (\varkappa^2 - p_0^i p_0^i + 2p_0^i p^i)(\xi-\xi_0) \qquad \text{für freie Lösungen}$$

$$\alpha = \alpha_V = (\varkappa^2 - p_0^i p_0^i)(\xi-\xi_0) + 2\left\{\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi' (p_0^i - eA^i(\xi'))\right\} p^i + \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi' e^2 A^i(\xi') A^i(\xi')$$

für Volkov-Lösungen.

$\frac{1}{2p^-} e^{-\frac{i}{2p^-}\chi(\xi,\xi_0|p^i)}$ ist singulär für $p^- = 0$. Die Taylor-Entwicklung um $p_0^-$ hat daher einen beschränkten Konvergenzradius $|p^- - p_0^-| < |p_0^-|$. Mit Hilfe der Entwicklungsformel für zugeordnete Laguerre-Polynome

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[\left(\frac{1}{2x}\right)^{n+1} e^{-\frac{z}{2x}}\right] = \left(\frac{1}{2x}\right)^{n+1} (-1)^m x^{-m}\, m!\, L_m^n\left(\frac{z}{2x}\right) e^{-\frac{z}{2x}} \qquad (5.6)$$

(vergl. ERDÉLYI, A. et al.: HTF Vol. 2 1953: 10.12 (26)).

erhält man mit (5.5)

$$\frac{1}{2p^-} e^{-\frac{i}{2p^-}\chi(\xi,\xi_0|p^i)} = \frac{1}{2p_0^-} e^{-\frac{i\alpha}{2p_0^-}} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} L_m^n\left(\frac{i\alpha}{2p_0^-}\right)\left[\frac{p_0^- - p^-}{p_0^-}\right]^m \left[\frac{-i(\xi-\xi_0)}{2p_0^-}\right]^n \frac{(p^i-p_0^i)^{2n}}{n!}$$

für $\left|\frac{p_0^- - p^-}{p_0^-}\right| < 1$ und $p_0^- \neq 0$. (5.7)

Man kann nun $\frac{\alpha}{2p^-}$ auf zwei verschiedene Weisen in Summanden zerlegen:

$$\frac{\alpha}{2p_o^-} = \beta_1 + \beta_2 = -\beta_1 \frac{p_o^- - p^-}{p_o^-} + \gamma \qquad (5.8)$$

mit

$$\beta_1^f = \frac{p_o^i p^i + \varkappa^2}{2p_o^-}(\xi - \xi_o), \quad \beta_1^V = \frac{1}{2p_o^-}\int_{\xi_o}^{\xi} d\xi' \left[(p_o^i - \varepsilon A^i(\xi'))^2 + \varkappa^2\right]$$

$$\beta_2^f = \frac{p_o^i}{p_o^-}(p^i - p_o^i)(\xi - \xi_o), \quad \beta_2^V = \frac{1}{p_o^-}\left\{\int_{\xi_o}^{\xi} d\xi' (p_o^i - \varepsilon A^i(\xi'))\right\}(p^i - p_o^i)$$

$$\gamma^f = \frac{\varkappa^2}{p_o^-}(\xi - \xi_o) + \left(\frac{p_o^i}{p_o^-} p^i - \frac{p_o^i p^i + \varkappa^2}{2(p_o^-)^2} p^-\right)(\xi - \xi_o) \qquad (5.9)$$

$$\gamma^V = \frac{\varkappa^2}{p_o^-}(\xi - \xi_o) - \frac{1}{p_o^-}\int_{\xi_o}^{\xi} d\xi' \left[(p_o^i - \varepsilon A^i(\xi'))\varepsilon A^i(\xi')\right] + \frac{1}{p_o^-}\left\{\int_{\xi_o}^{\xi} d\xi' (p_o^i - \varepsilon A^i(\xi'))\right\} p^i$$

$$- \frac{1}{2(p_o^-)^2}\left\{\int_{\xi_o}^{\xi} d\xi' \left[(p_o^i - \varepsilon A^i(\xi'))^2 + \varkappa^2\right]\right\} p^- \quad .$$

Diese Zerlegung hat eine zweifache Bedeutung:

- Die Taylor-Entwicklung des Exponenten $-\frac{i}{2p^-}\chi(\xi, \xi_o | p^i)$ um $p^- = p_o^-$, $p^i = p_o^i$ bis zur ersten Ordnung liefert

$$-\frac{i}{2p^-}\chi(\xi, \xi_o | p^i) = -i\gamma + O(2) \qquad (5.10)$$

  Man kann daher den entsprechenden Phasenfaktor $e^{-i\gamma}$ isolieren.

- Mit Hilfe der erzeugenden Funktion für die Laguerre-Polynome zeigt man

$$e^{xz}\sum_{n=0}^{\infty} L_n^n(x+y) z^n = \frac{e^{\frac{-(x+y)z + xz - xz^2}{1-z}}}{(1-z)^{n+1}} = \frac{e^{\frac{-(xz+y)z}{1-z}}}{(1-z)^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} L_n^n(xz+y) z^n \quad \text{für } |z| < 1 \quad . \qquad (5.12)$$

Damit wird aus (5.7)

$$\frac{1}{2p^-} e^{-\frac{i}{2p^-}\chi(\xi,\xi_0|p^i)} = \frac{1}{2p_0^-} e^{-i\tau + i\beta_1\frac{p_0^- - p^-}{p_0^-}} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} L_m^n\left(i\beta_1 + i\beta_2\right)\left[\frac{p_0^- - p^-}{p_0^-}\right]^m \left[\frac{-i(\xi-\xi_0)}{2p_0^-}\right]^n \frac{(p^i - p_0^i)^{2n}}{n!}$$

$$= \frac{1}{2p_0^-} e^{-i\tau} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} L_m^n\left(i\beta_1\frac{p_0^- - p^-}{p_0^-} + i\beta_2\right)\left[\frac{p_0^- - p^-}{p_0^-}\right]^m \left[\frac{-i(\xi-\xi_0)}{2p_0^-}\right]^n \frac{(p^i - p_0^i)^{2n}}{n!}$$

$$\text{für } \left|\frac{p_0^- - p^-}{p_0^-}\right| < 1\,, \quad p_0^- \neq 0\,. \tag{5.12}$$

Ausgeschrieben ergibt das

$$\frac{1}{2p^-} e^{-\frac{i}{2p^-}\chi_f(\xi,\xi_0|p^i)} = \frac{1}{2p_0^-} e^{-i\tau^f} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} L_m^n\left(-i\frac{p_0^i p_0^i + \varkappa^2}{2(p_0^-)^2}(\xi-\xi_0)(p^- - p_0^-) + i\frac{p_0^i}{p_0^-}(\xi-\xi_0)(p^i - p_0^i)\right)\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{p_0^- - p^-}{p_0^-}\right]^m \left[\frac{-i(\xi-\xi_0)}{2p_0^-}\right]^n \frac{(p^i - p_0^i)^{2n}}{n!} \tag{5.13}$$

$$\frac{1}{2p^-} e^{-\frac{i}{2p^-}\chi_V(\xi,\xi_0|p^i)} = \frac{1}{2p_0^-} e^{-i\tau^V} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} L_m^n\left(-i\left\{\frac{1}{2(p_0^-)^2}\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi'\left[(p_0^i - \varepsilon A^i(\xi'))^2 + \varkappa^2\right]\right\}(p^- - p_0^-) +\right.$$

$$\left. + i\left\{\frac{1}{p_0^-}\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi'(p_0^i - \varepsilon A^i(\xi'))\right\}(p^i - p_0^i)\right)\left[\frac{p_0^- - p^-}{p_0^-}\right]^m \left[\frac{-i(\xi-\xi_0)}{2p_0^-}\right]^n \frac{(p^i - p_0^i)^{2n}}{n!}$$

$$\left|\frac{p_0^- - p^-}{p_0^-}\right| < 1\,, \quad p_0^- \neq 0\,. \tag{5.14}$$

Man identifiziert die Ausdrücke für eine klassische Bahn

$$r_0^+(\xi) = \frac{p_{0kl}^i p_{0kl}^i + m^2c^2}{2(p_{0kl}^-)^2}(\xi - \xi_0) - \frac{1}{2(p_{0kl}^-)^2}\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi'\left(2p_{0kl}^i\frac{e}{c}A^i(\xi') - \frac{e^2}{c^2}A^i(\xi')A^i(\xi')\right) + r_0^+(\xi_0)$$

$$= \frac{p_0^i p_0^i + \varkappa^2}{2(p_0^-)^2}(\xi - \xi_0) - \frac{1}{2(p_0^-)^2}\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi'\left(2p_0^i\varepsilon A^i(\xi') - \varepsilon^2 A^i(\xi')A^i(\xi')\right) + r_0^+(\xi_0)$$

$$= r_{0f}^+(\xi) + \Delta r_0^+(\xi) + r_0^+(\xi_0) \tag{5.15}$$

$$r_o^i(\xi) = \frac{p_{on}^i}{p_{on}^-}(\xi - \xi_o) - \frac{1}{p_{on}^-}\int_{\xi_o}^{\xi} d\xi' \frac{e}{c} A^i(\xi') + r_o^i(\xi_o)$$

$$= \frac{p_o^i}{p_o^-}(\xi - \xi_o) - \frac{1}{p_o^-}\int_{\xi_o}^{\xi} d\xi' \varepsilon A^i(\xi') + r_o^i(\xi_o) = r_{of}^i(\xi) + \Delta r_o^i(\xi) + r_o^i(\xi_o) .$$

Zusammenfassend erhalten wir die Entwicklungen für die Fourier-Komponenten von (5.4)

$$\frac{1}{2p^-} e^{-i(p_f^+ \xi_o + p^- x^+ - p^i x^i)} e^{-\frac{i}{2p^-}\chi_f(\xi, \xi_o | p^i)} = \tag{5.16}$$

$$= \frac{1}{2p_o^-} e^{-i\frac{x_\perp^2}{p_o^-}(\xi - \xi_o) - i p_f^+ \xi_o} e^{-ip^-\{x^+ - r_o^+(\xi)\} + ip^i\{x^i - r_o^i(\xi)\}} \cdot$$

$$\cdot \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} L_m^n\left(-i r_{of}^+(\xi)(p^- - p_o^-) + i r_{of}^i(\xi)(p^i - p_o^i)\right)\left[\frac{p_o^- - p^-}{p_o^-}\right]^m \left[\frac{-i(\xi - \xi_o)}{2p_o^-}\right]^n \frac{(p^i - p_o^i)^{2n}}{n!} ,$$

$$\frac{1}{2p^-} e^{-i(p_f^+ \xi_o + p^- x^+ - p^i x^i)} e^{-\frac{i}{2p^-}\chi_V(\xi, \xi_o | p^i)} = e^{i\varepsilon\int_{\xi_o}^{\xi} d\xi' \dot{r}_o^i(\xi') A^i(\xi')} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{2p_o^-} e^{-i\frac{x_\perp^2}{p_o^-}(\xi - \xi_o) - i p_f^+ \xi_o} e^{-ip^-\{x^+ - (r_o^+(\xi) + \Delta r_o^+(\xi))\} + ip^i\{x^i - (r_o^i(\xi) + \Delta r_o^i(\xi))\}} \cdot$$

$$\cdot \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} L_m^n\left(-i\left(r_{of}^+(\xi) + \Delta r_o^+(\xi)\right)(p^- - p_o^-) + i\left(r_{of}^i(\xi) + \Delta r_o^i(\xi)\right)(p^i - p_o^i)\right) \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{p_o^- - p^-}{p_o^-}\right]^m \left[\frac{-i(\xi - \xi_o)}{2p_o^-}\right]^n \frac{(p^i - p_o^i)^{2n}}{n!} .$$

Diese Form der Entwicklungen ermöglicht den einfachen Vergleich der Volkov-Komponenten mit freien Komponenten, die um $\Delta r_o^{\tilde{i}}(\xi)$ verschoben sind

$$\frac{1}{2p^-} e^{-i(p_f^+ \xi_o + p^- x^+ - p^i x^i)} e^{-\frac{i}{2p^-}\chi_V(\xi,\xi_o|p^i)} = e^{i\varepsilon \int_{\xi_o}^{\xi} d\xi' \dot{r}_o^i(\xi') A^i(\xi')} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{2p^-} e^{-i(p_f^+ \xi_o + p^-(x^+ - \Delta r_o^+(\xi)) - p^i(x^i - \Delta r_o^i(\xi)))} e^{-\frac{i}{2p^-}\chi_f(\xi,\xi_o|p^i)} \qquad (5.17)$$

für $|p^- - p_o^-| < |p_o^-|$ .

Nun kann man analytisch fortsetzen auf den gesamten Bereich $p^- \neq 0$. Damit erhält man die Relation zwischen Volkov-Wellenpaketen beliebiger Form und entsprechenden freien Wellenpaketen

$$\varphi_+^{ext}(\tilde{x}) = e^{i\varepsilon \int_{\xi_o}^{\xi} d\xi' \dot{r}_o^i(\xi') A^i(\xi')} \varphi_+^f(x^-, x^I - \Delta r_o^I(\xi)) \qquad (5.18)$$

$(\xi = x^-)$ .

Diese Beziehung gilt im Laborsystem und erweist sich zusammen mit der Darstellungsform (5.2) als äußerst nützlich für quantenelektrodynamische Rechnungen (vergl. Kapitel 6.1). Man kann jedoch die raumzeitliche Ausbreitung der Volkov-Wellenpakete noch weiter aufschlüsseln, indem man die Verschiebung $x^I \longrightarrow x^I + \Delta r_o^I(\xi)$ kompensiert durch die Transformation auf ein entlang einer klassischen Bahn nachgeführtes Bezugssystem: Auf der rechten Seite der Gleichung (5.18) tritt ein Eichterm auf, den man durch eine geeignete Umeichung des äußeren Potentials zum verschwinden bringen kann. Die Klein-Gordon-Gleichung (4.1):

$$K_{\tilde{x}}^A \varphi_+^{ext}(\tilde{x}) = 0$$

ist äquivalent der umgeeichten Gleichung

$$K_{\tilde{x}}^{A+\partial\Lambda} \left[ e^{-i\varepsilon\Lambda(\tilde{x})} \varphi_+^{ext}(\tilde{x}) \right] = 0 \quad . \qquad (5.19)$$

Wählt man

$$\Lambda(\tilde{x}) = \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi' \, \dot{r}_0^i(\xi') A^i(\xi') \tag{5.20}$$

und damit die Umeichung

$$A^{\tilde{\mu}}(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ a a_1(\xi) \\ a a_2(\xi) \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow A^{\tilde{\mu}}(\tilde{x}) + \partial^{\tilde{\mu}} \Lambda(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ a a_1(\xi) \\ a a_2(\xi) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\dot{r}_0^i(\xi) a a_i(\xi) \end{bmatrix}, \tag{5.21}$$

so wird der Vorfaktor in (5.18) kompensiert.

Man kann nun die Entwicklung, die zu (5.18) führt, so ansetzen, daß $r_0^{\tilde{i}}$ der Bahn eines anfangs ruhenden Teilchens entspricht:

$$p_0^{1,2} \longrightarrow 0 \; ; \; p_0^{\tilde{-}} \longrightarrow \infty \tag{5.22}$$

$$\Delta r_0^{1,2}(\xi) \longrightarrow -\frac{e a}{mc^2} \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi' a_{1,2}(\xi') \; , \; \Delta r_0^{+}(\xi) \longrightarrow \frac{e^2 a^2}{2(mc^2)^2} \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi' a_i(\xi') a_i(\xi')$$

$$\dot{r}_0^{1,2}(\xi) \longrightarrow -\frac{e a}{mc^2} a_{1,2}(\xi) \; , \; \dot{r}_0^{+}(\xi) \longrightarrow \frac{1}{2} + \frac{e^2 a^2}{2(mc^2)^2} a_i(\xi) a_i(\xi)$$

Die Geschwindigkeiten $\dot{r}_0^{\tilde{i}}(\xi)$ erfüllen dann die Bedingung (2.12) für Kupersztych-Transformationen. In diesem Fall ist die Umeichung (5.21) äquivalent einer Kupersztych-Transformation (2.17), die vom Laborsystem auf das momentane Ruhesystem eines anfangs ruhenden klassischen Teilchens transformiert. (vergl. 2.20-2.23). Wenn man daher über eine entsprechende Serie von Kupersztych-Transformationen auf das mit der Bewegung dieses Teilchens mitgeführte beschleunigte Bezugssystem transformiert, so wird sowohl der Vorfaktor als auch die endliche Verschiebung

$\Delta r_o^i(\xi)$ kompensiert! Man erhält in diesem beschleunigten Bezugssystem

$$\varphi_+^{'ext}(x') = \varphi_+^f(x) \quad . \tag{5.23}$$

Damit ist die raumzeitliche Entwicklung von Volkov-Wellenpaketen beliebiger Form aufgedeckt. Relativ zu einem beschleunigten Bezugssystem, dessen Ursprung auf der Bahn einer anfangs ruhenden klassischen Punktladung im Laser-Feld mitbewegt wird breiten sich die Volkov-Wellenpakete aus wie entsprechende freie Pakete. Die Koordinatenachsen des beschleunigten Bezugssystems sind jeweils so orientiert, daß das äußere Feld invariant bleibt; die Beschleunigungstransformation baut sich aus einer Serie von Kupersztych-Transformationen auf. Die Orientierung der Achse entspricht daher der jeweiligen Orientierung des Spins eines Dirac-Elektrons (KUPERSZTYCH 1976, 1978). Es treten darüberhinaus keine Modulationen oder sonstige quantenmechanische Effekte auf. Nach dieser Auflösung erkennt man außerdem, daß die Frage des monochromatischen Grenzfalls sich nur noch auf die Bewegung des beschleunigten Bezugssystems relativ zum Laborsystem bezieht. Damit wurde das Problem von der quantenmechanischen Ebene vollständig auf die klassische Ebene verlagert, wo man dem monochromatischen Grenzfall einen eindeutigen Sinn geben kann (vergl. Kapitel 3).

## 6. Laser-Compton-Streuung. Darstellung der Observablen

Die Analyse der raumzeitlichen Entwicklung normierter Volkov-Lösungen führte zu einer Auftrennung in einen klassischen Anteil: die Bewegung eines Bezugssystems entlang der Bahn eines klassischen geladenen Punktteilchens und in einen quantenmechanischen Anteil: die freie Ausbreitung des Wellenpakets in diesem beschleunigt bewegten Bezugssystem. Auf diese Weise konnte die Problematik des Grenzfalls eines monochromatischen äußeren Feldes vollständig auf die entsprechende Fragestellung für ein klassisches Punktteilchen zurückgespielt und damit aufgelöst werden. Die einfachen Darstellungsformen (5.2) und (5.18) für normierte Volkov-Lösungen erlauben es nun, aus diesem Blickwinkel heraus den quantenelektrodynamischen Prozeß der Laser-Compton-Streuung neu zu behandeln unter expliziter Wahrung der Streu-Bedingungen, (vergl. Kap. 4) und mit der spezifischen Intention, den monochromatischen Grenzfall aufzuklären.

In semiklassischer Beschreibung ist der theoretische Ansatzpunkt das S-Matrix-Element zur 1. Ordnung Störungstheorie im Furry-Wechselwirkungsbild (vergl. Anhang 4). Streurandbedingungen sind erfüllt, wenn wir dabei für die ein- und auslaufenden (skalaren) Elektronen normierte Volkov-Zustände zu einem äußeren Wellenfeld mit kompakter Pulsform verwenden. Die Pulsform soll zunächst nicht weiter spezifiert werden (vergl. 2.6).
Bei diesen allgemeinen Vorgaben kann man, ähnlich wie bei der Wellenpaketausbreitung, analytisch nur wieder auf eine Relationsaussage hoffen. Die Strategie wird sein, eine Beziehung heraus-

zuarbeiten zwischen geeigneten Streu-Observablen des quantenelektrodynamischen Prozesses und den entsprechenden Observablen des elektrodynamischen Strahlungsprozesses 1. Ordnung für eine klassische Stromverteilung. Eine einfache derartige Beziehung würde ein völlig befriedigendes Informationsmaximum darstellen, da man auf diese Weise ja die Quantenkorrekturen von den klassischen Effekten separieren könnte. Als Startpunkt zu diesem Ziel eignet sich besonders eine Formel für den abgestrahlten Energie-Impuls, die strukturgleich gilt für den quantenelektrodynamischen und für den klassischen Prozeß (Herleitung: Anhang 3, 4)

$$P^{\mu}_{QT,kl} = \frac{f}{c^3}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4k\,\theta(k^0)\,\delta(k^2)\,k^{\mu}\,\left|j_{QT,kl}(k)\right|^2 \quad . \tag{6.1}$$

Der Zusammenhang soll zunächst kurz skizziert werden.

Für den Energie-Impuls, der von einer klassischen Punktladung während des Eigenzeitintervalls $\tau$ bis $\tau + d\tau$ abgestrahlt wird, erhält man den Ausdruck

$$dP^{\mu}_{Rad} = -\lim_{\varrho_{min}\to\infty}\frac{1}{c}\int_{d\sigma}\varepsilon_{\sigma}\,\theta^{\mu\nu}_{elm}\,d^3\sigma_{\nu} \tag{6.2}$$

(vergl. ROHRLICH 1965, p. 106 ff.).

Das Integrationsvolumen $d\sigma$ ist der ringförmige Ausschnitt einer raum- oder zeitartigen Hyperfläche $\sigma$ , der von den beiden Zukunftslichtkegeln zu den Ereignissen $r^{\mu}(\tau)$ und $r^{\mu}(\tau + d\tau)$ begrenzt wird. Die Vorzeichenfunktion $\varepsilon_{\sigma}$ ist $+1$ bzw. $-1$, wenn $d^3\sigma_{\nu}$ raumartig bzw. zeitartig ist. $\varrho$ ist der retardierte Abstand zwischen Punktladung und Integrationshyperfläche:

$$\varrho = |R| = |x^\mu - r^\mu(\tau)|_{Ret} \quad .$$

$\theta^{\mu\nu}_{elm}$ ist der retardierte Anteil des symmetrisierten Energie-Impuls-Tensors des elektromagnetischen Strahlungsfeldes.

Wählt man nun für $d\sigma$ die zeitartige Fläche, die im Ruhesystem der Ladung zu einem Zylinder wird

$$d\sigma^\mu = u^\mu \varrho^2 \, d\Omega \, c \, d\tau \quad ; \quad u_\mu u^\mu = 1 \; ; \; u_\mu \frac{d}{d\tau} r^\mu = 0 \, , \tag{6.3}$$

und drückt man $\theta^{\mu\nu}_{elm}$ in den retardierten Feldern aus, so wird das Integral von $\varrho$ unabhängig, und man kann den Limes weglassen

$$\frac{dP^\mu_{Rad}(\tau)}{d\tau} = \int_{d\sigma} \theta^{\mu\nu} u_\nu \varrho^2 \, d\Omega \quad . \tag{6.4}$$

Die Auswertung des Integrals liefert die kovariante Verallgemeinerung der Larmor-Formel

$$\frac{dP^\mu_{Rad}(\tau)}{d\tau} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^5} a_\lambda a^\lambda v^\mu \quad . \tag{6.5}$$

Betrachten wir nun den gesamten abgestrahlten Energie-Impuls

$$P^\mu_{Rad} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dP^\mu_{Rad}(\tau)}{d\tau} \, d\tau = \int \theta^{\mu\nu}_{elm} u_\nu \varrho^2 \, d\Omega \, d\tau = \frac{1}{c} \int_{\sigma_{zeitartig}} \theta^{\mu\nu}_{elm} \, d\sigma_\nu \, . \tag{6.6}$$

Wir können die zeitartige Hyperfläche $\sigma$ soweit ausdehnen, daß sie zusammen mit zwei unendlich fernen raumartigen Hyperflächen, die keinen Beitrag zum Integral mehr liefern, das gesamte Raum-Zeit-Volumen einhüllt. Mit dem Gauß'schen Satz

$$\int_{V_4} \partial_\mu f^{\mu\nu} \, d^4x = \int_{S_3} \varepsilon_\sigma f^{\mu\nu} \, d\sigma_\nu \tag{6.7}$$

erhalten wir dann

$$P^\mu_{Rad} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dP^\mu_{Rad}}{d\tau} \, d\tau = -\frac{1}{c} \int d^4x \, \partial_\nu \theta^{\mu\nu}_{elm} \quad . \tag{6.8}$$

Aus (6.8) läßt sich dann der klassische Teil der Formel (6.1) herleiten (vergl. Anhang 3).

Im Fall einer anfangs ruhenden Punktladung im ebenen Wellenfeld können wir die Eigenzeit $\tau$ des Teilchens ausdrücken:

$$n_\mu x^\mu + c\tau = 0 \quad \text{bzw.} \quad \xi = c\tau \tag{6.9}$$

mit dem konstanten lichtartigen Vektor $n^\mu = (1, \vec{n})$, (vergl. 2.1).

Damit wird $d^4x = d\xi\, d^3\tilde{x} = c\, d\tau\, d^3\tilde{x}$

und

$$\frac{dP^\mu_{Rad}}{d\tau} = -\int d^3\tilde{x}\; \partial_\nu \Theta^{\mu\nu}_{elm} = c\,\frac{dP^\mu_{Rad}}{d\xi} \,. \tag{6.10}$$

Die entsprechende quantentheoretische Observable berechnet man aus dem S-Matrix-Element für ein einlaufendes (skalares) Elektron und ein auslaufendes Elektron und ein auslaufendes Photon in erster Ordnung Störungstheorie. Die totale Übergangswahrscheinlichkeit für diesen Prozess

$$\Gamma_{tot} = \sum_{\substack{\text{alle End-}\\ \text{zustände}}} S^{(1)*}_{fi}\, S^{(1)}_{fi} \tag{6.11}$$

läßt sich darstellen als Integral über den Wellenvektor $k^\mu$

$$\Gamma_{tot} = \int d^4k\; \Theta(k^0)\, \delta(k^2)\, \Gamma'(k) = \int_+ d^3\bar{k}\; \tilde{\Gamma}'(\bar{k}) \tag{6.12}$$

(vergl. A 4.22) mit $\bar{k} = (k^-, k^1, k^2)$, $\int_+ d^3\bar{k} = \int_0^\infty dk^- \int d^2k^i$.

Für den Prozeß gilt Erhaltung in den drei Impulskomponenten

$$\bar{P}_{init.} = \bar{P}_{final} + \bar{k}\,, \quad \text{d.h.:}\ \bar{P}_{init.} \longrightarrow \bar{P}_{final} = \bar{P}_{init.} - \bar{k} \tag{6.13}$$

Wir deuten daher $\tilde{\Gamma}'(\bar{k})\, d^3\bar{k}$ als Wahrscheinlichkeit, ein Photon

im Impulsraumvolumen $d^3\bar{k}$ um den Impuls $(-\hbar\bar{k})$ zu finden, also

$$\tilde{T}(\bar{k}) = W(-\bar{k}) \qquad !$$

Wir schreiben daher $T_{tot}$ mit Hilfe einer Integralsubstitution $k^\mu \leftrightarrow -k^\mu$ um

$$T_{tot} = \int d^3\bar{k}\, W(\bar{k}) = \int d^3\bar{k}\, \tilde{T}(-\bar{k}) = \int d^4\tilde{k}\, \theta(-\tilde{k}^\circ)\, \delta(\tilde{k}^2)\, T(-\tilde{k})$$

$$= \int d^4k\, \theta(-k^\circ)\, \delta(k^2)\, T(-k) = \int d^4k\, \theta(-k^\circ)\, \delta(k^2)\, W(k) \qquad (6.14)$$

Damit erhalten wir nun den Erwartungswert für den Photon-Impuls

$$P_\gamma^\mu = \hbar \langle K^\mu \rangle = \hbar \int d^4k\, \theta(-k^\circ)\, \delta(k^2)\, k^\mu\, W(k) \qquad (6.15)$$

und durch Rücksubstitution

$$P_\gamma^\mu = -\hbar \int d^4k\, \theta(k^\circ)\, \delta(k^2)\, k^\mu\, T(k) \qquad (6.16)$$

Dies erklärt das relative Minuszeichen zwischen $T_{tot}$ und $P_\gamma^\mu$ (vergl. ERBER/WHITE/LATAL 1976 a,b).
Durch Auswertung der Struktur des S-Matrix-Elements gewinnt man aus (6.16) den quantentheoretischen Teil der Formel (6.1) (vergl. Anhang 4).

Zum Abschluß dieses Kapitels noch eine Bemerkung zu der Rolle der lichtartigen Koordinaten: Für die Darstellung von Meßgrößen erscheint die zeitartige Beschreibung aus Interpretationsgründen natürlich. Darüberhinaus ist für die Herleitung der explizit kovarianten Strahlungsformel (6.1) die Lorentz-Eichung wesentlich. Diese Formel bildet den Angelpunkt zwischen kovarianter zeitartiger Formulierung der QED und lichtartiger Beschreibung der

ein- und auslaufenden (klassischen) Felder, so daß die lichtartigen Koordinaten auf dieser Ebene lediglich die Bedeutung von besonders geeigneten Integrationsvariablen haben. Diese Sichtweise steht im Gegensatz zu NEVILLE/ROHRLICH (1971), die eine lichtartige QED in lichtartiger Eichung für notwendig hielten.

## 6.1 Separation der Quanteneffekte

Der geeignete Ansatz für die Berechnung des Laser-Compton-Prozesses unter den beschriebenen allgemeinen Bedingungen ist die quantenelektrodynamische Strahlungsformel (vergl. Kapitel 6, Anhang 4)

$$P_{QT}^{\mu} = \frac{1}{c^3}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4k\,\theta(k^0)\,\delta(k^2)\,k^{\mu}\,|j(k)|^2$$

mit (6.1), (A4.25)

$$|j(k)|^2 = \sum_{\beta+} j^{*}_{\mu(\beta\alpha)}(k)\, j^{\mu}_{(\beta\alpha)}(k) \quad .$$

Dabei ist $j^{\mu}_{(\beta\alpha)}(k)$ die Fourier-transformierte Stromdichte

$$j^{\mu}_{(\beta\alpha)}(k) = \int d^4x\; j^{\mu}_{(\beta\alpha)}(x)\, e^{-ikx}$$

$$j^{\mu}_{(\beta\alpha)}(x) = -ie\,c\left(\varphi^{e*}_{\beta+}(x) \overleftrightarrow{\partial^{\mu}} \varphi^{e}_{\alpha+}(x) - 2ie\,A^{\mu}_{ext}(x)\,\varphi^{e*}_{\beta+}(x)\,\varphi^{e}_{\alpha+}(x)\right) .$$

Für die Felder $\varphi^{e}(x)$ setzen wir nun Volkov-Wellenpaketlösungen in den beiden Darstellungsformen (5.2) und (5.18) ein:

- Für die einlaufende Komponente $\varphi^{e}_{\alpha+}(x)$ die Form (5.2)

$$\varphi^{e}_{\alpha+}(\tilde{x}) = \frac{\sqrt{\hbar c}}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d^3\tilde{p}}{2p^-}\,h_{\alpha+}(\tilde{p})\,e^{ie\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi'\,\tilde{\tau}^i(\xi'|\tilde{p})A^i_{ext}(\xi')}\; e^{-i\{p^+_f x^- - \tilde{p}(\tilde{x}-\Delta\tilde{\tau}(\xi|\tilde{p}))\}} \qquad (6.17)$$

wobei $\bar{p}\cdot\bar{x} = p_{\tilde{\imath}}\, x^{\tilde{\imath}} = p^{i}x^{i} - p^{-}x^{+}$ .

- Für die auslaufende Komponente $\varphi^{e*}_{\beta+}(x)$ die Form (5.18), die man aus einer Entwicklung um einen festen Impuls $\bar{p}_0$ erhält. Wir wählen für diesen Impuls die Integrationsvariable $\bar{p}$ der einlaufenden Komponente, also

$$\varphi^{e*}_{\beta+}(\tilde{x}) = \frac{\sqrt{\hbar c}}{(2\pi)^{3/2}} \int_{+}\frac{d^3\bar{p}'}{2p'^{-}}\, h^{*}_{\beta+}(\bar{p}')\, e^{-i\varepsilon\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi'\, \dot{\tau}^{i}(\xi'|\bar{p})A^{i}_{\varepsilon\varkappa\ell}(\xi')}\, e^{i\{\xi p'^{+}_{f} x^{-} - \bar{p}'(\bar{x} - \Delta\bar{\tau}(\xi|\bar{p}))\}} \tag{6.18}$$

Damit erhalten wir übersichtliche Ausdrücke zunächst für die lichtartigen Stromdichtekomponenten $j^{\tilde{\mu}}_{(\beta\alpha)}(k)$

$$j^{+}(k) = -i\varepsilon c\int d^4x\,(\varphi^{e*}_{\beta+}(x)\overleftrightarrow{\partial^{+}}\varphi^{e}_{\alpha+}(x))\, e^{-ikx}$$

$$= \frac{\varepsilon\hbar c^2}{(2\pi)^3}\int d^4x \int_{+}\frac{d^3\bar{p}'}{2p'^{-}}\int_{+}\frac{d^3\bar{p}}{2p^{-}}\, h^{*}_{\beta+}(\bar{p}')\,h_{\alpha+}(\bar{p})\, e^{-i(p'-p+k)x}\, e^{+i(\bar{p}'-\bar{p})\Delta\bar{\tau}(\xi|\bar{p})}\cdot$$

$$\cdot\{(p'^{+}_{f}+p^{+}_{f}) + (\bar{p}'+\bar{p})\Delta\dot{\tau}(\xi|\bar{p}) - 2\varepsilon\dot{\tau}^{i}(\xi|\bar{p})A^{i}_{\varepsilon\varkappa\ell}(\xi)\}$$

$$= ec\int d\xi \int_{+}\frac{d^3\bar{p}'}{2p'^{-}}\int_{+}\frac{d^3\bar{p}}{2p^{-}}\, h^{*}_{\beta+}(\bar{p}')\,h_{\alpha+}(\bar{p})\,\delta_3(\bar{p}'-\bar{p}+\bar{k})\, e^{i(p'^{+}_{f}-p^{+}_{f}+k^{+})x^{-}}\, e^{-i\bar{k}\Delta\bar{\tau}(\xi|\bar{p})}\cdot$$

$$\cdot\{(p'^{+}_{f}+p^{+}_{f}) + (2\bar{p}-\bar{k})\Delta\dot{\tau}(\xi|\bar{p}) - 2\varepsilon\dot{\tau}^{i}(\xi|\bar{p})A^{i}_{\varepsilon\varkappa\ell}(\xi)\} \tag{6.19}$$

$$= ec\int d\xi \int_{+}\frac{d^3\bar{p}'}{2p'^{-}}\int_{+}\frac{d^3\bar{p}}{2p^{-}}\, h^{*}_{\beta+}(\bar{p}')\,h_{\alpha+}(\bar{p})\,\delta_3(\bar{p}'-\bar{p}+\bar{k})\, e^{ik^{+}x^{-}}\cdot$$

$$\cdot\{\frac{1}{i}\frac{d}{d\xi} + 2p^{+}_{f} + 2p^{-}\Delta\dot{\tau}^{+}\}\, e^{-i\bar{k}\bar{\tau}(\xi|\bar{p}) + i\Delta(\bar{p}|\bar{k})\xi}$$

mit

$$r^+(\xi|\bar p) = \frac{p_\xi^+}{p^-}\,\xi + \Delta r^+(\xi|\bar p) = \frac{p^i_{\kappa\iota}\,p^i_{\kappa\iota} + \kappa^2 c^2}{2(p^-_{\kappa\iota})^2}\,\xi + \Delta r^+$$

$$r^i(\xi|\bar p) = \frac{p^i}{p^-}\,\xi + \Delta r^i(\xi|\bar p) = \frac{p^i_{\kappa\iota}}{p^-_{\kappa\iota}}\,\xi + \Delta r^i \qquad (6.20)$$

$$\Delta(\bar p|\bar k) = \frac{(p^- k^i - k^- p^i)^2 + (k^-)^2\varkappa^2}{2(p^- - k^-)(p^-)^2} \qquad (6.21)$$

Nach einer partiellen Integration bzgl. $\xi$ erhält man schließlich

$$j^+(k) = ec\int d\xi \int_+ \frac{d^3\bar p'}{2p'^-} \int_+ \frac{d^3\bar p}{2p^-}\, h^*_{\beta+}(\bar p')\, h_{\alpha+}(\bar p)\, \delta_3(\bar p' - \bar p + \bar k)\{2p^- r^+(\xi|\bar p) - k^+\} e^{-ikr + i\Delta(\bar p|\bar k)\xi}$$

Analog:

$$j^i(k) = ec\int d\xi \int_+ \frac{d^3\bar p'}{2p'^-} \int_+ \frac{d^3\bar p}{2p^-}\, h^*_{\beta+}(\bar p')\, h_{\alpha+}(\bar p)\, \delta_3(\bar p' - \bar p + \bar k)\{(2p^i - k^i) - 2cA^i_{\varepsilon\varepsilon}(\xi)\} e^{-ikr + i\Delta\cdot\xi}$$

$$= ec\int d\xi \int_+ \frac{d^3\bar p'}{2p'^-} \int_+ \frac{d^3\bar p}{2p^-}\, h^*_{\beta+}(\bar p')\, h_{\alpha+}(\bar p)\, \delta_3(\bar p' - \bar p + \bar k)\{2p^- r^i(\xi|\bar p) - k^i\} e^{-ikr + i\Delta(\bar p|\bar k)\xi}$$

$$j^-(k) = ec\int d\xi \int_+ \frac{d^3\bar p'}{2p'^-} \int_+ \frac{d^3\bar p}{2p^-}\, h^*_{\beta+}(\bar p')\, h_{\alpha+}(\bar p)\, \delta_3(\bar p' - \bar p + \bar k)\{2p^- - k^-\} e^{-ikr + i\Delta\cdot\xi}$$

$$= ec\int d\xi \int_+ \frac{d^3\bar p'}{2p'^-} \int_+ \frac{d^3\bar p}{2p^-}\, h^*_{\beta+}(\bar p')\, h_{\alpha+}(\bar p)\, \delta_3(\bar p' - \bar p + \bar k)\{2p^- r^-(\xi|\bar p) - k^-\} e^{-ikr + i\Delta(\bar p|\bar k)\xi}$$

Zusammen erhält man den 4-Vektor in zeitartiger Darstellung

$$j^\mu(k) = ec\int d\xi \int_+ \frac{d^3\bar p'}{2p'^-} \int_+ \frac{d^3\bar p}{2p^-}\, h^*_{\beta+}(\bar p')\, h_{\alpha+}(\bar p)\, \delta_3(\bar p' - \bar p + \bar k)\{2p^- r^\mu(\xi|\bar p) - k^\mu\} e^{-ikr + i\Delta(\bar p|\bar k)\xi} \qquad (6.22)$$

Bei $j^*_\mu(k)\, j^\mu(k)$ fassen wir nun die einzelnen Terme nach dem Schema

$$(a-c)(b-c) = ab - c^2 - c(b-c) - (a-c)c \qquad (6.23)$$

zusammen:

$$j_\mu^*(k)\, j^\mu(k) = e^2 c^2 \int d\xi' d\xi \int_+ \frac{d^2\bar q'}{2q'^-} \frac{d^2\bar q}{2q^-} \frac{d^2\bar p'}{2p'^-} \frac{d^2\bar p}{2p^-}\, h_{\beta+}(\bar q')\, h^*_{\alpha+}(\bar q)\, h^*_{\beta+}(\bar p')\, h_{\alpha+}(\bar p) \cdot$$

$$\cdot\, \delta_3(\bar q' - \bar q + \bar k)\, \delta_3(\bar p' - \bar p + \bar k) \{ 2q^- 2p^-\, \dot\tau_\lambda(\xi'|\bar q)\, \dot\tau^\lambda(\xi|\bar p) - k_\lambda k^\lambda \} \cdot$$

$$\cdot\, e^{+ik(\tau(\xi'|\bar q) - \tau(\xi|\bar p))}\, e^{-i(\Delta(\bar q|\bar k)\xi' - \Delta(\bar p|\bar k)\xi)} \qquad (6.24)$$

$$- k_\lambda j^\lambda(k) \;-\; j_\mu^*(k)\, k^\mu \,.$$

Wegen $k_\lambda k^\lambda = 0$ und $k_\lambda j^\lambda(k) = k_\lambda j^{*\lambda}(k) = 0$ ist dann

$$j_\mu^*(k)\, j^\mu(k) = j_\mu'^*(k)\, j'^\mu(k) \qquad (6.25)$$

mit

$$j'^\mu(k) = ec \int d\xi \int_+ \frac{d^2\bar p'}{2p'^-} \int_+ d^3\bar p\; h^*_{\beta+}(\bar p')\, h_{\alpha+}(\bar p)\, \delta_3(\bar p' - \bar p + \bar k)\, \dot\tau^\mu(\xi|\bar p)\, e^{-ik\tau(\xi|\bar p) + i\Delta(\bar p|\bar k)\xi} \,.$$

Die Summation über die Endzustände liefert schließlich (vergl. 4.14)

$$|j(k)|^2 = \sum_{\beta+} j^*_{\mu(\beta\alpha)}(k)\, j^\mu_{(\beta\alpha)}(k) = \sum_{\beta+} j'^*_{\mu(\beta\alpha)}(k)\, j'^\mu_{(\beta\alpha)}(k)$$

$$= e^2 c^2 \int d\xi' d\xi \int \frac{d^2\bar q'}{2\bar q'^-} \int_+ d^2\bar q\, d^3\bar p\; h^*_{\alpha+}(\bar q)\, h_{\alpha+}(\bar p)\, \delta_3(\bar q' - \bar q + \bar k)\, \delta_3(\bar q' - \bar p + \bar k) \cdot$$

$$\cdot\, \dot\tau_\mu(\xi'|\bar q)\, \dot\tau^\mu(\xi|\bar p)\, e^{+ik(\tau(\xi'|\bar q) - \tau(\xi|\bar p)) - i(\Delta(\bar q|\bar k)\xi' - \Delta(\bar p|\bar k)\xi)}$$

$$= e^2 c^2 \int \frac{d^2\bar p\, \Theta(p^- - k^-)}{2(p^- - k^-)} \left| h_{\alpha+}(\bar p) \right|^2 \int d\xi' d\xi\, \dot\tau_\mu(\xi'|\bar p)\, \dot\tau^\mu(\xi|\bar p)\, e^{+ik(\tau(\xi'|\bar p) - \tau(\xi|\bar p)) - i\Delta(\bar p|\bar k)(\xi' - \xi)}$$

(6.26)

Der Übergang zu scharfem Anfangsimpuls $h_{\alpha+}(\bar{p}) \longrightarrow \sqrt{2|p^-|}\,\delta_3(\bar{p}-\bar{p}_\alpha)$ führt mit Hilfe der Volumennormierung (Volumen $\bar{V}$ auf der lichtartigen Hyperebene $\xi$ = const.) zu

$$|j(k)|^2 \longrightarrow \lim_{\bar{V}\to\infty} \frac{1}{\bar{V}}\, e^2c^2 \int_+ \frac{d^3\bar{q}'}{q'^-} \int_+ \frac{d^3\bar{p}'}{p'^-}\, p'^-\, \delta_3(\bar{q}'-\bar{p}')\,\bar{p}_\alpha\, \delta_{\bar{V}}(\bar{q}'-\bar{p}_\alpha+\bar{k})^2 \cdot$$

$$\cdot \int d\xi'\, d\xi\; \dot{\tau}_\mu(\xi'|\bar{p}_\alpha)\,\dot{\tau}^\mu(\xi|\bar{p}_\alpha)\, e^{+ik(\tau(\xi'|\bar{p}_\alpha)-\tau(\xi|\bar{p}_\alpha))-i\Delta(\bar{p}_\alpha|\bar{k})(\xi'-\xi)}$$

$$= \int_+ \frac{d^3\bar{p}'}{p'^-} \left\{ \lim_{\bar{V}\to\infty} \frac{1}{\bar{V}} \left| \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\xi}^{\xi} d^3\tilde{x}\, e^{-i(\bar{p}'-\bar{p}_\alpha+\bar{k})\tilde{x}} \right|^2 p_\alpha^-\, \mathfrak{z}_\alpha(k) \right. \tag{6.27}$$

$$= \int \frac{d^3\bar{p}'}{|p'^-|}\, \theta(p'^-)\, \delta_3(\bar{p}'-\bar{p}_\alpha+\bar{k})\, p_\alpha^-\, \mathfrak{z}_\alpha(k) = \frac{p_\alpha^-\,\theta(p_\alpha^- - k^-)}{p_\alpha^- - k^-}\, \mathfrak{z}_\alpha(k)$$

mit

$$\mathfrak{z}_\alpha(k) = e^2c^2 \int d\xi'\, d\xi\; \dot{\tau}_\mu(\xi'|\bar{p}_\alpha)\,\dot{\tau}^\mu(\xi|\bar{p}_\alpha)\, e^{+ik(\tau(\xi'|\bar{p}_\alpha)-\tau(\xi|\bar{p}_\alpha))-i\Delta(\bar{p}_\alpha|\bar{k})(\xi'-\xi)} \tag{6.28}$$

Wir können nun den quantentheoretischen Ausdruck $\mathfrak{z}(k)$ unmittelbar in Beziehung setzen zu dem entsprechenden Term aus der klassischen Strahlungsformel für einen Fadenstrom. Für den Fadenstrom

$$j_{kl}^\mu(x) = ec \int d\tau\; \dot{\tau}^\mu(\tau)\, \delta_4(x-\tau(\tau)) \tag{6.29}$$

wird

$$j_{kl}^\mu(k) = ec \int d^4x\, d\tau\; \dot{\tau}^\mu(\tau)\, \delta_4(x-\tau(\tau))\, e^{-ikx} \quad .$$

Setzen wir die Bahn eines Punktteilchens im ebenen Wellenfeld in lichtartigen Koordinaten ein (vergl. 3.16), so erhalten wir mit (3.18)

$$j^{\mu}_{kl}(k) = ec\int d^4x\, d\tau\, \frac{p^-}{m}\frac{d}{d\xi}r^{\mu}(\xi)\,\delta\left(\xi - \frac{p^-}{m}\tau\right) S_{\lambda}(\bar{x} - \bar{r}(\xi))\, e^{-ikx}$$

$$= ec\int d\xi\, \dot{r}^{\mu}(\xi|\bar{p})\, e^{-ikr(\xi|\bar{p})} \qquad \text{mit } \dot{r}^{\mu}(\xi|\bar{p}) = \frac{d}{d\xi}r^{\mu}(\xi) \tag{6.30}$$

und wir identifizieren

$$\mathcal{J}_{\alpha}(k) = \left| j_{kl}(k^+ + \Delta(\bar{p}_{\alpha}|\bar{k}), \bar{k})\right|^2 \quad . \tag{6.31}$$

Insgesamt erhält man also

$$P^{\mu}_{QT} = \frac{t}{c^3}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4k\, \theta(k^0)\,\delta(k^2)\,k^{\mu}\,\frac{p^-_{\alpha}\,\theta(p^-_{\alpha}-k^-)}{p^-_{\alpha}-k^-}\left| j_{kl}(k^+ + \Delta(\bar{p}_{\alpha}|\bar{k}), \bar{k})\right|^2 . \tag{6.32}$$

## 6.2 Transformation auf das mitbewegte Bezugssystem

Faßt man die Ausdrücke in $\mathcal{J}(k) = \left| j_{kl}(k^+ + \Delta(\bar{p}|\bar{k}), \bar{k})\right|^2$ als klassische Terme auf, insbesondere $r^{\mu}(\xi|\bar{p})$ als Bahnkoordinaten eines klassischen Teilchens im Laser, so wird man $\Delta(\bar{p}|\bar{k})$ als Verschiebung der zur Eigenzeit dieses Teilchens konjugierten "Frequenz" interpretieren. Genauer (mit 3.18):

$$\Delta\omega_{\tau} = \Delta(\bar{p}|\bar{k})\frac{cp^-}{\varkappa} = c\,\frac{(p^-k^i - k^-p^i)^2 + (k^-)^2\varkappa^2}{2(p^- - k^-)p^-\varkappa} \quad . \tag{6.33}$$

Wir können hieraus eine Frequenzverschiebung rekonstruieren, indem wir in das mit dem klassischen Teilchen mitbewegte Bezugssystem transformieren, wo die Eigenzeit des Teilchens mit der Koordinatenzeit übereinstimmt. Genauer: Wir werden über eine Serie von Kypersztych-Boosttransformationen $\tilde{\Lambda}^{\tilde{\mu}}_{(k)\tilde{\nu}}(\xi)$ (vergl. Kapitel 5) auf das Ruhesystem eines klassischen Teilchens im Laser transformieren, welches anfangs, "vor" dem

Laser ruht. Aus der Matrixdarstellung der Kupersztych-Transformation (2.17) zu den Relativgeschwindigkeiten

$$\frac{1}{c}\frac{d\Delta r^i}{d\tau} = \Delta\dot{r}^i(\xi) = -\frac{e}{\varkappa} A^i_{ext}(\xi) \qquad \text{(vergl. 5.22)} \qquad (6.34)$$

entnimmt man das Tranformationsverhalten der Koordinaten und Impulse

$$\begin{aligned} r'^- &= r^- - \xi \quad ; \quad r'^i = r^i - \Delta\dot{r}^i \cdot \xi \\ r'^+ &= r^+ - \Delta\dot{r}^i \cdot r^i + \tfrac{1}{2}\Delta\dot{r}^i\Delta\dot{r}^i \cdot \xi \\ k'^- &= k^- \quad ; \quad k'^i = k^i - \Delta\dot{r}^i \cdot k^- \\ k'^+ &= k^+ - \Delta\dot{r}^i \cdot k^i + \tfrac{1}{2}\Delta\dot{r}^i\Delta\dot{r}^i \cdot k^- \end{aligned} \qquad (6.35)$$

$p$ transformiert sich entsprechend.

Hiermit verifiziert man

$$\Delta'(\bar{p}'|\bar{k}') = \frac{(p'^- k'^i - k'^- p'^i)^2 + (k'^-)^2\varkappa^2}{2(p'^- - k'^-)(p'^-)^2} = \frac{(p^- k^i - k^- p^i)^2 + (k^-)^2\varkappa^2}{2(p^- - k^-)(p^-)^2} \qquad (6.36)$$

$$= \Delta(\bar{p}\,|\,\bar{k}) \quad .$$

Man erkennt damit, daß sowohl der klassische Ausdruck

$$\frac{dP^\mu_{kl}}{d\xi} = \frac{f}{c^2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4k\,\Theta(k^0)\,\delta(k^2)\,k^\mu\, j^*_{kl;\mu}(k)\, j^\mu_{kl}(\xi\,|\,k) \qquad (6.37)$$

mit $j^\mu_{kl}(\xi|k) = \int d^3\tilde{x}\; j^\mu_{kl}(x)\, e^{-ikx}$ ,

als auch der quantentheoretische Ausdruck

$$\frac{dP^\mu_{QT}}{d\xi} = \frac{f}{c^2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4k\,\Theta(k^0)\,\delta(k^2)\,k^\mu\,\frac{p^-\Theta(p^- - k^-)}{p^- - k^-}\; j^*_{kl;\mu}(k^+ + \Delta, \bar{k})\, j^\mu_{kl}(\xi|k^+ + \Delta, \bar{k}) \qquad (6.38)$$

forminvariant ist gegenüber Kupersztych-Transformationen!

Nach dieser Forminvarianzüberlegung stellt sich die Frage nach der Transformation der numerischen Werte insbesondere von $\bar{P}$. $\Lambda_{(k)}(\xi)$ vermittelt zwischen dem Laborsystem (Ruhesystem des anfangs ruhenden Teilchens "vor" dem Laser) und dem momentanen Ruhesystem des anfangs ruhenden Teilchen im Laser zur "Zeit" $\xi$. Das bedeutet: $\Lambda_{(k)}(\xi)$ vermittelt zwischen den Impulsen $\bar{P}(\xi)$ und $\bar{P}(\xi_0)$: $\bar{P}'(\xi) = \bar{P}(\xi_0)$. Damit kann man auch nach der Transformation auf das momentane Ruhesystem des Teilchens mit den numerischen Werten der einlaufenden Teilchenimpulse arbeiten.

Im folgenden spezialisieren wir uns auf den Fall einlaufender Impulse, die einem anfangs ruhenden Teilchen entsprechen. Dann wird:

$$P_\alpha^- \longrightarrow \varkappa \;,\quad P_\alpha^i \longrightarrow 0 \;,\quad \xi \longrightarrow c\tau$$

$$\Delta(\bar{P}|\bar{k}) \longrightarrow \frac{k^i k^i + (k^-)^2}{2(\varkappa - k^-)} \qquad (6.39)$$

## 6.3 Einschub über Observable

Die Logik der bisherigen Überlegungen läuft darauf hinaus, die klassische Punktladung in der Funktion eines beschleunigten Beobachters zu behandeln, von dem aus die quantentheoretische Strahlung vermessen wird. Ensprechend dieser Logik kann man die $\xi$ -Auflösung des quantentheoretischen 4-Impulses (6.38)

$$\frac{dP_{QT}^\mu}{d\xi} \quad \text{mit} \quad \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \, \frac{dP_{QT}^\mu}{d\xi} = P_{QT}^\mu \qquad (6.40)$$

deuten: $\frac{dP_{QT}^\mu}{d\tau} = c\,\frac{dP_{QT}^\mu}{d\xi}$ sind die Komponenten der quantentheoretischen Strahlungsrate, bezogen auf die Eigenzeit des

"Punktladungs-Beobachters".

Im folgenden betrachten wir die Energierate, dargestellt im momentanen Ruhesystem des Punktladungsbeobachters

$$\frac{dE'_{QT}}{dt'} = c\frac{dP'^{0}_{QT}}{d\tau} = c^2\frac{dP'^{0}_{QT}}{d\xi} \tag{6.41}$$

und hiervon die Auflösung nach Frequenz und Raumwinkel

$$\frac{dE'_{QT}}{dt'd\omega'd\Omega'} \quad \text{mit} \quad \frac{dE'_{QT}}{dt'} = \int_0^\infty d\omega' \int d\Omega' \frac{dE'_{QT}}{dt'd\omega'd\Omega'} = c\int_0^\infty d\lambda'^0 \int d\Omega' \frac{dE'_{QT}}{dt'dc\lambda'^0 d\Omega'} \tag{6.42}$$

Diese quantentheoretische Observable vergleichen wir mit der entsprechenden klassischen Observable für eine Punktladung im Wellenfeld

$$\begin{aligned}\frac{dE'_{kl}}{dt'} &= c^2\frac{f}{c^3}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\lambda'^0 d\lambda' d\Omega' \lambda'^0 \Theta(\lambda'^0)\delta(\lambda'^2) j'^{*}_{kl;\mu}(\lambda'^0, \lambda'\vec{n}')\, j'^{\mu}_{kl}(\xi|\lambda'^0, \lambda'\vec{n}') \\ &= c\int_0^\infty d\lambda'^0 \int d\Omega' \frac{dE'_{kl}}{dt'd\omega'd\Omega'} ,\end{aligned} \tag{6.43}$$

also

$$\frac{dE'_{kl}}{dt'd\omega'd\Omega'} = \frac{1}{2c}\frac{f}{c^2}\frac{1}{(2\pi)^3}\omega'^2\, j'^{*}_{kl;\mu}\left(\frac{\omega'}{c}, \frac{\omega'}{c}\vec{n}'\right) j'^{\mu}_{kl}\left(\xi|\frac{\omega'}{c}, \frac{\omega'}{c}\vec{n}'\right) . \tag{6.44}$$

## 6.4 Strahlungsgeometrie

Alle Ausdrücke seien nun auf das mitbewegte Bezugssystem bezogen (vergl. Kapitel 6.2). Dann ist insbesondere

$$k_\Delta r(\xi|\bar{P}_{u_0}) + \Delta(\bar{P}_{u_0}|\bar{k})\cdot\xi = k_\Delta r(\xi|\bar{P}_{u_0}) \tag{6.45}$$

mit $k^\mu_\Delta = (k^0_\Delta, \vec{k})$ und $k^0_\Delta = k^0 + \Delta(\bar{P}_{u_0}|\bar{k}) = k^0 + \frac{k^i k^i + (k^-)^2}{2(\varkappa - k^-)}$ .

Die Transformation auf Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} k^1 &= k \sin\theta \cos\varphi \\ k^2 &= k \sin\theta \sin\varphi \\ k^- &= k(1-\cos\theta) = 2k \sin^2\tfrac{\theta}{2} \\ k^+ &= \tfrac{1}{2}k(1+\cos\theta) = k\cos^2\tfrac{\theta}{2} \end{aligned} \qquad (6.46)$$

liefert

$$k^i k^i + (k^-)^2 = k^2 \sin^2\theta + k^2(1-\cos\theta)^2 = 2k^2(1-\cos\theta) = 4k^2 \sin^2\tfrac{\theta}{2} \qquad (6.47)$$

und damit

$$k^\circ_\Delta = k^\circ + \frac{k^i k^i + (k^-)^2}{2(\varkappa - k^-)} = \frac{2k\varkappa - 4k^2\sin^2\frac{\theta}{2} + 4k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2(\varkappa - 2k\sin^2\frac{\theta}{2})} = \frac{k^\circ}{1 - 2\frac{k^\circ}{\varkappa}\sin^2\frac{\theta}{2}} \; . \qquad (6.48$$

Wir erhalten also genau die (inverse) Compton-Frequenzverschiebung

$$\omega_\Delta(\omega) = \frac{\omega}{1 - 2\frac{\hbar\omega}{mc^2}\sin^2\frac{\theta}{2}} \quad ; \quad \lambda - \lambda_\Delta = 2\lambda_c \sin^2\tfrac{\theta}{2} \; . \qquad (6.49)$$

Damit ist die momentane Strahlungsleistung im momentanen Ruhesystem der klassischen Punktladung und in Polarkoordinaten

$$P_{QT}(t) = \frac{dE_{QT}}{dt} = P_{QT}(\tfrac{1}{c}\xi) \qquad (6.50)$$

$$= c^2 \frac{1}{c^3}\frac{1}{(2\pi)^3}\int dk^\circ dk\, d\Omega\, k^\circ \Theta(k^\circ)\delta(k_\mu k^\mu) k^2 \frac{\Theta(1-\frac{2k^\circ}{\varkappa}\sin^2\frac{\theta}{2})}{1-\frac{2k^\circ}{\varkappa}\sin^2\frac{\theta}{2}} j^*_{kl;\mu}(k^\circ_\Delta, k\vec{n}) j^\mu_{kl}(\xi | k^\circ_\Delta, k\vec{n}) \; .$$

Um die Rechnung fortsetzten zu können, muß zunächst ein formales Problem überwunden werden. Der klassische Fourier-transformierte Strom hängt im allgemeinen von der Frequenz nicht nur über die nullte Komponente $k^\circ$ des Wellenvektors ab, sondern auch über die Kombination mit der Strahlungsrichtung $\frac{\omega}{c}\vec{n}$.

Die Compton-Frequenzverschiebung tritt jedoch nur in der nullten Komponente auf: $k^\circ \longrightarrow k^\circ_\Delta$ . Für einen realistischen Laser-Puls, bei dem die Variation der Pulsform über eine Periode der Laser-Grundfrequenz vernachlässigt werden kann, läßt sich jedoch die Frequenzabhängigkeit von der Winkelabhängigkeit separieren, wenn man die Stromausdrücke jeweils über eine Periode mittelt (vergl. Kapitel 6.6)

$$j^*_{kl_{//}}\left(\tfrac{u}{c},\tfrac{u}{c}\vec{n}\right) j^{//}_{kl}\left(\xi\middle|\tfrac{u}{c},\tfrac{u}{c}\vec{n}\right) \longrightarrow \bar{\mathfrak{J}}_{kl}(\xi|k^\circ,\vec{n}) \quad . \tag{6.51}$$

Dieses Ergebnis, das in Kapitel 6.6 für das Laborsystem abgeleitet wird, überträgt sich auf das momentane Ruhesystem, das wir hier verwenden, da $\bar{\mathfrak{J}}(\xi|k^\circ,\vec{n})$ proportional ist zu der Invarianten $\frac{d\bar{P}(\tau)}{\omega^2 d\omega\, d\Omega}$ (verg. Kapitel 6.5).

Für realistische Laser-Pulse erhalten wir somit den quantentheoretischen Ausdruck für die über eine Periode der Laser-Grundfrequenz gemittelte momentane Strahlungsleistung

$$\bar{P}_{QT}(t) = \frac{f}{c}\frac{1}{(2\pi)^3}\int dk^\circ\, dk\, d\Omega\, k^\circ\,\theta(k^\circ)\,\delta(k_\Delta k^\prime)\,k^2\,\frac{\theta\left(1-\frac{2k^\circ}{\varkappa}\sin^2\frac{\Theta}{2}\right)}{1-\frac{2k^\circ}{\varkappa}\sin^2\frac{\Theta}{2}}\,\bar{\mathfrak{J}}_{kl}(\xi|k^\circ_\Delta,\vec{n}) . \tag{6.52}$$

Führt man nun eine Integralsubstitution durch

$$\begin{aligned} k^\circ &\longrightarrow \frac{k^\circ}{1-2\frac{k^\circ}{\varkappa}\sin^2\frac{\Theta}{2}} = k^\circ_\Delta(k^\circ) \\ dk^\circ &= \left(1-\frac{2k^\circ}{\varkappa}\sin^2\frac{\Theta}{2}\right)^2 dk^\circ_\Delta = \left(\frac{k^\circ}{k^\circ_\Delta}\right)^2 dk^\circ_\Delta \quad , \end{aligned} \tag{6.53}$$

so erreicht man eine Verschiebung der nullten Komponente von

$\bar{\mathfrak{J}}_{kl}(\xi|k^\circ_\Delta,\vec{n})$ : $k^\circ_\Delta = k^\circ + \Delta \longrightarrow k^\circ$ ,

so daß man diesen Ausdruck als regulären klassischen Ausdruck interpretieren kann.

Zur Vorbereitung der Substitution folgende Umformungen:

Mit (6.48) wird

$$\delta(k^\circ - k) = \frac{1}{(1-2\frac{k^\circ}{\varkappa}\sin^2\frac{\Theta}{2})^2}\,\delta\Big(k_\Delta^\circ - \frac{k}{1-2\frac{k}{\varkappa}\sin^2\frac{\Theta}{2}}\Big) = \Big(\frac{k_\Delta^\circ}{k}\Big)^2\delta(\ldots) \qquad (6.54)$$

und

$$\Theta(k^\circ)\,\delta(k_\wedge k') = \frac{1}{2|k^\circ|}\,\delta(k^\circ - k) = \frac{1}{2|k^\circ|}\Big(\frac{k_\Delta^\circ}{k}\Big)^2\delta\Big(k_\Delta^\circ - \frac{k}{1-2\frac{k}{\varkappa}\sin^2\frac{\Theta}{2}}\Big);$$

andererseits

$$\Theta(k_\Delta^\circ)\,\delta\Big((k_\Delta^\circ)^2 - \frac{k^2}{(1-2\frac{k}{\varkappa}\sin^2\frac{\Theta}{2})^2}\Big) = \frac{1}{2|k^\circ|}\,\delta\Big(k_\Delta^\circ - \frac{k}{1-2\frac{k}{\varkappa}\sin^2\frac{\Theta}{2}}\Big)\quad, \qquad (6.55)$$

und damit

$$k^\circ\Theta(k^\circ)\,\delta(k_\wedge k')\,k^2 = |k^\circ|\,\Theta(k^\circ)\,\delta(k_\wedge k')\,k^2 = \Big(\frac{k_\Delta^\circ}{k}\Big)^2|k^\circ|\,\frac{|k_\Delta^\circ|}{|k^\circ|}\,\Theta(k_\Delta^\circ)\,\delta\Big((k_\Delta^\circ)^2 - \frac{k^2}{(1-2\frac{k}{\varkappa}\sin^2\frac{\Theta}{2})^2}\Big)k^2$$

$$= (k_\Delta^\circ)^3\,\Theta(k_\Delta^\circ)\,\delta\Big((k_\Delta^\circ)^2 - \frac{k^2}{(1-2\frac{k}{\varkappa}\sin^2\frac{\Theta}{2})^2}\Big)\quad . \qquad (6.56)$$

Mit Hilfe dieser Umformungen erhält man die Substitution

$$\int dk^\circ\,k^\circ\,\Theta(k^\circ)\,\delta(k_\wedge k')\,\frac{\Theta(1-2\frac{k^\circ}{\varkappa}\sin^2\frac{\Theta}{2})}{1-2\frac{k^\circ}{\varkappa}\sin^2\frac{\Theta}{2}}\,k^2$$

$$= \int dk_\Delta^\circ\,k\,\Theta(k_\Delta^\circ)\,\delta\Big((k_\Delta^\circ)^2 - \frac{k^2}{1-2\frac{k}{\varkappa}\sin^2\frac{\Theta}{2}}\Big)(k_\Delta^\circ)^2 \qquad (6.57)$$

Auf diese Weise entsteht aus (6.52)

$$\frac{1}{\omega}\bar{P}_{QT}(\omega,\vec{n},t)\,d\omega = \frac{c^2}{2}\,\frac{f}{c^3}\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int dk\,\frac{1}{c\,k_\Delta^\circ}\,\delta\Big(k_\Delta^\circ - \frac{k}{1-2\frac{k}{\varkappa}\sin^2\frac{\Theta}{2}}\Big)\,\bar{\eta}_j(\xi|k_\Delta^\circ,\vec{n})\frac{d\omega_\Delta}{c} \qquad (6.58)$$

$$= \int dk\Big(\frac{k}{k_\Delta^\circ}\Big)^2\delta\Big(k - \frac{k_\Delta^\circ}{1+2\frac{k_\Delta^\circ}{\varkappa}\sin^2\frac{\Theta}{2}}\Big)\frac{1}{\omega_\Delta}\,\bar{P}_{kl}(\omega_\Delta,\vec{n},t)\,d\omega_\Delta\quad,$$

da

$$\delta\Big(k_\Delta^\circ - \frac{k}{1-2\frac{k}{\varkappa}\sin^2\frac{\Theta}{2}}\Big) = \Big(\frac{k}{k_\Delta^\circ}\Big)^2\delta\Big(k - \frac{k_\Delta^\circ}{1+2\frac{k_\Delta^\circ}{\varkappa}\sin^2\frac{\Theta}{2}}\Big) = \frac{1}{(1+2\frac{k_\Delta^\circ}{\varkappa}\sin^2\frac{\Theta}{2})^2}\,\delta(\ldots)\quad .$$

Wegen $\frac{d\omega}{d\omega_\Delta} = \frac{1}{(1+2\frac{k_i}{\varkappa}\sin^2\frac{\theta}{2})^2}$ (6.59)

ist dann

$$\frac{1}{U}\bar{P}_{QT}(\omega,\vec{n},t)\,d\omega = \frac{1}{\omega_\Delta}\bar{P}_{kl}(\omega_\Delta,\vec{n},t)\,\frac{d\omega}{d\omega_\Delta}\,d\omega_\Delta$$

und wir erhalten für die Separation der Quanteneffekte im momentanen Ruhesystem des klassischen Teilchens das einfache Endergebnis

$$\frac{1}{U}\bar{P}_{QT}(\omega,\vec{n},t) = \frac{1}{\omega_\Delta}\bar{P}_{kl}(\omega_\Delta,\vec{n},t) \qquad (6.60)$$

mit der inversen Compton-Frequenzverschiebung

$$\omega_\Delta = \frac{\omega}{1-2\frac{k\omega}{mc^2}\sin^2\frac{\theta}{2}} \qquad (6.49)$$

## 6.5 Observable im Laborsystem

Die bisherigen Ausdrücke für P(t) bezogen sich auf das momentane Ruhesystem einer klassischen Punktladung im Laserfeld. t ist dabei die retardierte Zeit dieser Ladung, zugleich deren Eigenzeit. Das Zeitintervall dt fällt jedoch im momentanen Ruhesystem mit dem Koordinatenzeitintervall zusammen. Bezogen auf Koordiantenzeiten ist aber $P(t) = \frac{dE}{dt}$ eine Lorentz-Invariante; ebenso $\frac{d^3k}{k}$. Damit ist

$$\frac{dP(t)}{d^3k/\omega} = \frac{dP(t)}{\omega\,d\omega\,d\Omega} \qquad (6.61)$$

eine Invariante. Die Kupersztych-Transformationen auf das momentane Ruhesystem können deshalb einfach rückgängig gemacht

werden

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{\omega'} P'_{QT}(\omega', \vec{n}', t') & = & \frac{1}{\omega'_\Delta} P'_{KL}(\omega'_\Delta, \vec{n}', t') & = & \frac{1}{\omega_\Delta} P_{KL}(\omega_\Delta, \vec{n}, t) \\ \| & & & & \| \\ \frac{1}{\omega} P_{QT}(\omega, \vec{n}, t) & = & \frac{1}{\omega_\Delta} P_{KL}(\omega_\Delta, \vec{n}, t) & & \end{array} \tag{6.62}$$

Dabei geht ein, daß sich $\omega_\Delta$ unter Kupersztych-Transformationen gleich transformiert wie $\omega$, wegen

$$\omega_\Delta = \frac{\omega}{1 - 2\frac{\omega}{\varkappa c}\sin^2\frac{\vartheta}{2}} = \frac{\varkappa}{\varkappa - k^-}\omega = \frac{P^-_{a_0}}{P^-_{a_0} - k^-}\omega \tag{6.63}$$

und der Invarianz von $\frac{P^-_{a_0}}{P^-_{a_0} - k^-}$ (vergl. 6.35).

Man erhält daher auch im Laborsystem

$$\frac{1}{\omega}\bar{P}_{QT}(\omega, \vec{n}, t) = \frac{1}{\omega_\Delta}\bar{P}_{KL}(\omega_\Delta, \vec{n}, t)\ ;\ \omega_\Delta = \frac{\omega}{1 - 2\frac{\hbar\omega}{mc^2}\sin^2\frac{\vartheta}{2}} \tag{6.64}$$

Damit kann man nun die zeitintegrierten Größen im Laborsystem

$$\begin{aligned} \frac{d^2 I(\omega, \vec{n})}{d\omega\, d\Omega} &= \int_{-\infty}^{\infty} dt\, P(\omega, \vec{n}, t) \simeq \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \bar{P}(\omega, \vec{n}, t) \\ \frac{dW}{d\Omega} &= \int_0^\infty d\omega\, \frac{d^2 I(\omega, \vec{n})}{d\omega\, d\Omega} \end{aligned} \tag{6.65}$$

berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega}\frac{d^2 I_{QT}(\omega, \vec{n})}{d\omega\, d\Omega} &= \frac{1}{\omega_\Delta}\frac{d^2 I_{KL}(\omega_\Delta, \vec{n})}{d\omega_\Delta\, d\Omega} \\ \frac{dW_{QT}}{d\Omega} &= \int_0^\infty d\omega\, \frac{dI_{QT}(\omega, \vec{n})}{d\omega\, d\Omega} = \int_0^\infty d\omega\, \frac{\omega}{\omega_\Delta}\frac{dI_{KL}(\omega_\Delta, \vec{n})}{d\omega\, d\Omega} \end{aligned} \tag{6.66}$$

Betrachten wir nun anstelle des Energiespektrums das Photonenzahlspektrum:

$$dN(\omega, t) = \frac{1}{\hbar\omega} dE(\omega, t) \tag{6.67}$$

$\frac{dN}{d\tau}$ ist eine Invariante und damit auch $\frac{dN}{d\tau d^3k/\omega} = \frac{dN(\tau)}{\omega d\omega d\Omega}$ .
Wir erhalten somit

$$\frac{1}{\omega'} N'_{QT}(\omega', \vec{n}', \tau) = \frac{1}{\hbar\omega'^2} P'_{QT}(\omega', \vec{n}', t') = \frac{1}{\hbar\omega'} \frac{1}{\omega'_A} P'_{kl}(\omega'_A, \vec{n}', t') = \frac{1}{\hbar\omega} \frac{1}{\omega_A} P_{kl}(\omega_A, \vec{n}, \frac{1}{c}\xi)$$

$$\frac{1}{\omega} N_{QT}(\omega, \vec{n}, \tau) = \frac{1}{\hbar\omega^2} P_{QT}(\omega, \vec{n}, \tau) = \frac{1}{\hbar\omega} \frac{1}{\omega_A} P_{kl}(\omega_A, \vec{n}, \frac{1}{c}\xi) = \frac{1}{\hbar\omega} N_{kl}(\omega_A, \vec{n}, \frac{1}{c}\xi) \qquad (6.68)$$

Die Quantenkorrektur läßt sich daher im Laborsystem auch folgendermaßen ausdrücken:

$$\bar{N}_{QT}(\omega, \vec{n}, \frac{1}{c}\xi) = \bar{N}_{kl}(\omega_A, \vec{n}, \frac{1}{c}\xi) = \bar{N}_{kl}(\omega_A, \vec{n}, \tau) \qquad (6.69)$$

und für die $\xi$ -integrierten Größen

$$\frac{d^2 N_{QT}}{d\hbar\omega\, d\Omega} = \frac{1}{\hbar} \int d\xi\, \bar{N}_{QT}(\omega, \vec{n}, \frac{1}{c}\xi) = \frac{1}{\hbar} \int d\tau\, \bar{N}_{kl}(\omega_A, \vec{n}, \tau) \qquad (6.70)$$

$$= \frac{d^2 N_{kl}}{d\hbar\omega_A\, d\Omega} \quad .$$

## 6.6 Klassische Rechnung für einen zirkularpolarisierten Puls

Die quantenelektrodynamische Rechnung ergab unter sehr allgemeinen Bedingungen als einzige Quantenkorrektur für das abgestrahlte Photonenspektrum eine Compton-Frequenz-Verschiebung gegenüber dem entsprechenden klassischen Spektrum. Alle nichtlinearen Effekte sind somit auf der klassischen Ebene zu diskutieren. Die nichtlineare intensitätsabhängige Frequenzverschiebung insbesondere kann als Dopplerverschiebung gedeutet werden (vergl. KIBBLE 1965). Entsprechend kann man den Übergang zum monochromatischen Grenzfall (vergl. Kapitel 4)

jetzt auf der klassischen Ebene durchführen, wo die Verhältnisse unproblematisch sind. Dazu soll zunächst das klassische Strahlungsspektrum berechnet werden bei einer realistischen Pulsform des Lasers. Für die Beschreibung eines zirkularpolarisierten Laserpulses kann man das elektromagnetische Potential

$$A^1(x) = -\frac{a(\xi)}{\sqrt{2}} \cos\frac{\omega_0}{c}\xi \quad , \quad A^2(x) = \frac{a(\xi)}{\sqrt{2}} \sin\frac{\omega_0}{c}\xi \tag{6.71}$$

verwenden, mit der Grundfrequenz $\omega_0$ und einer kompakten Pulsform

$$a(\xi) = 0 \quad \text{für} \quad \xi \leq \xi_0 \quad \text{bzw.} \quad \xi \geq \xi_1 \quad . \tag{6.72}$$

Dabei sei $a(\xi)$ eine langsam veränderliche Funktion, die über eine Periode $\frac{2\pi c}{\omega_0}$ der Laser-Grundfrequenz praktisch konstant ist. Diese Annahme ist für realistische Laser-Pulse in hohem Maß gerechtfertigt, selbst für Pulsdauern im Pikosekundenbereich (vergl. Kapitel 2).

Damit erhalten wir für die Bahn einer klassischen Punktladung, die anfangs (bei $\xi_0$) im Ursprung des Koordinatensystems ruht

$$\begin{aligned}
\dot{r}^0(\xi) &= 1 + \frac{v^2(\xi)}{2} \quad ; \quad r^0(\xi) = \xi + \frac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi' v^2(\xi') \\
\dot{r}^1(\xi) &= v(\xi)\cos\left(\frac{\omega_0}{c}\xi\right) \quad ; \quad r^1(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi' v(\xi')\cos\left(\frac{\omega_0}{c}\xi'\right) \\
\dot{r}^2(\xi) &= -v(\xi)\sin\left(\frac{\omega_0}{c}\xi\right) \quad ; \quad r^2(\xi) = -\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi' v(\xi')\sin\left(\frac{\omega_0}{c}\xi'\right) \\
\dot{r}^3(\xi) &= \frac{v^2(\xi)}{2} \quad ; \quad r^3(\xi) = \frac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi' v^2(\xi')
\end{aligned} \tag{6.73}$$

mit der Amplitudenfunktion $v(\xi) = \frac{e\,a(\xi)}{\sqrt{2}\,mc^2}$ . (6.74)

Der Exponent im Fourier-transformierten Fadenstrom

$$j^{\wedge}_{k\perp}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, j^{\wedge}_{k\perp}(\xi|k) = ec \int d\xi\, \dot{r}(\xi)\, e^{-ikr(\xi)} \tag{6.30}$$

ist dann

$$ikr(\xi) = -i\frac{\omega}{c}\xi - i\frac{\omega}{c}\sin^2\frac{\theta}{2}\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi'\, \nu^2(\xi') + i\frac{\omega}{c}\sin\theta \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi'\, \nu(\xi')\cos\left(\frac{\omega_0}{c}\xi' + \varphi\right) \tag{6.75}$$

Außerdem:

$$\dot{r}_{\mu}(\xi)\,\dot{r}^{\wedge}(\xi') = \frac{\nu(\xi)\,\nu(\xi')}{2}\left[e^{i\frac{\omega_0}{c}(\xi-\xi')} + e^{-i\frac{\omega_0}{c}(\xi-\xi')}\right] - \left[1 + \frac{1}{2}(\nu^2(\xi) + \nu^2(\xi'))\right] \tag{6.76}$$

Damit wird nun

$$j^{*}_{k\perp\mu}(\xi|k)\, j^{\wedge}_{k\perp}(\xi'|k) = e^2c^2\left\{\frac{\nu(\xi)\nu(\xi')}{2}\left[e^{i\frac{\omega_0}{c}(\xi-\xi')} + e^{-i\frac{\omega_0}{c}(\xi-\xi')}\right] - \left[1+\frac{1}{2}(\nu^2(\xi)+\nu^2(\xi'))\right]\right\} \cdot$$
$$\cdot\, e^{-i\frac{\omega}{c}\xi - i\frac{\omega}{c}\sin^2\frac{\theta}{2}\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi'\,\nu^2(\xi') + i\frac{\omega}{c}\sin\theta\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi'\,\nu(\xi')\cos\left(\frac{\omega_0}{c}\xi'+\varphi\right)} \cdot \tag{6.77}$$
$$\cdot\, e^{i\frac{\omega}{c}\xi' + i\frac{\omega}{c}\sin^2\frac{\theta}{2}\int_{\xi_0}^{\xi'} d\xi''\,\nu^2(\xi'') - i\frac{\omega}{c}\sin\theta\int_{\xi_0}^{\xi'} d\xi''\,\nu(\xi'')\cos\left(\frac{\omega_0}{c}\xi''+\varphi\right)}$$

Wir führen nun eine Mittelung durch über eine Periode $\frac{2\pi c}{\omega_0}$ um $\xi = \xi_\alpha$ bzw. $\xi' = \xi_\alpha$

$$\overline{j^{*}_{k\perp\mu}(k)\, j^{\wedge}_{k\perp}(k)}\,(\xi_\alpha) = \frac{\omega_0}{2\pi c}\int_{\xi_\alpha-\frac{\pi c}{\omega_0}}^{\xi_\alpha+\frac{\pi c}{\omega_0}} d\xi \int_{\xi_\alpha-\frac{\pi c}{\omega_0}}^{\xi_\alpha+\frac{\pi c}{\omega_0}} d\xi'\, j^{*}_{k\perp,\mu}(\xi|k)\, j^{\wedge}_{k\perp}(\xi'|k) \tag{6.78}$$

Mit der Substitution $\eta = \xi - \xi_\alpha$ und der Näherungsannahme, daß $\nu(\xi)$ über eine Periode $\frac{2\pi c}{\omega_0}$ um $\xi_\alpha$ praktisch konstant ist, erhält man dann

$$\overline{j^{*}_{k\perp\mu}(k)\, j^{\wedge}_{k\perp}(k)}\,(\xi_\alpha) \simeq \frac{\omega_0 e^2c^2}{4\pi c}\int_{-\frac{\pi c}{\omega_0}}^{\frac{\pi c}{\omega_0}} d\eta \int_{-\frac{\pi c}{\omega_0}}^{\frac{\pi c}{\omega_0}} d\eta'\left\{\nu^2(\xi_\alpha)\left[e^{i\frac{\omega_0}{c}(\eta-\eta')} + e^{-i\frac{\omega_0}{c}(\eta-\eta')}\right] - 2\left(1+\frac{1}{\nu^2(\xi_\alpha)}\right)\right\} \cdot \tag{6.79}$$

$$\cdot e^{-i\frac{\omega}{c}(1+\nu^2(\xi_\mu)\sin^2\frac{\theta}{2})\eta + i\frac{\omega}{\omega_0}\nu(\xi_\mu)\sin\theta\sin(\frac{\omega_0}{c}\eta+\varphi)} \cdot \tag{6.79}$$
$$\cdot e^{i\frac{\omega}{c}(1+\nu^2(\xi_\mu)\sin^2\frac{\theta}{2})\eta' - i\frac{\omega}{\omega_0}\nu(\xi_\mu)\sin\theta\sin(\frac{\omega_0}{c}\eta'+\varphi)} \}$$

Wegen des Vektor-Transformationsverhaltens der Ströme bei Lorentz-Transformationen und der Proportionalität von $\xi$ zur invarianten Eigenzeit der Punktladung kann man zur Berechnung der Mittelungsintegrale in einfacher Weise auf das mittlere Ruhesystem transformieren, wo die Teilchenbahn periodisch verläuft (vergl. Kapitel 3)

$$\frac{\omega_0}{2\pi c}\int_{-\frac{\pi c}{\omega_0}}^{\frac{\pi c}{\omega_0}} d\eta \int_{\frac{\pi c}{\omega_0}}^{\frac{\pi c}{\omega_0}} d\eta' \; j_\mu^*(\xi_\mu+\eta|k)\, j^\mu(\xi_\mu+\eta'|k)$$
$$= \frac{\omega_R}{2\pi c}\int_{-\frac{\pi c}{\omega_R}}^{\frac{\pi c}{\omega_R}} d\eta \int_{-\frac{\pi c}{\omega_R}}^{\frac{\pi c}{\omega_R}} d\eta' \; j_\mu'^*(\xi_\mu+\eta|k')\, j'^\mu(\xi_\mu+\eta'|k')$$

mit der Doppler-verschobenen Laser-Grundfrequenz $\omega_R = \frac{\omega_0}{(1+\nu^2(\xi_\mu))^{1/2}}$ (vergl. SARACHIK/SCHAPPERT 1970).

Auf Grund der Periodizität der Bewegung kann man hier zu der äquivalenten Mittelung übergehen

$$\lim_{X'\to\infty}\frac{1}{X'}\int_{-\frac{X'}{2}}^{\frac{X'}{2}} d\eta \int_{-\frac{X'}{2}}^{\frac{X'}{2}} d\eta' \; j_\mu'^*(\xi_\mu+\eta|k')\, j'^\mu(\xi_\mu+\eta'|k') \quad ,$$

welche sich schließlich wieder einfach auf das Laborsystem übertragen läßt. Die Mittelung über eine Periode der Laser-Grundfrequenz (6.78) läßt sich daher ersetzen durch die äquivalente Mittelung

$$\overline{j_{kl;\mu}^*(k)\, j_{kl}^\mu(k)}(\xi_\mu) = \lim_{X\to\infty}\frac{1}{X}\int_{-\frac{X}{2}}^{\frac{X}{2}} d\eta \int_{-\frac{X}{2}}^{\frac{X}{2}} d\eta' \; j_{kl;\mu}^*(\xi_\mu+\eta|k)\, j_{kl}^\mu(\xi_\mu+\eta'|k) \,. \tag{6.78a}$$

Mit Hilfe der Entwicklung nach Besselfunktionen

$$e^{iB\sin\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(B)\, e^{in\varphi}$$

formen wir den Integranden von (6.79) um:

$$j^{*}_{\kappa l j \mu}(\xi_a+\eta|k)\, j^{\mu}_{\kappa l}(\xi_a+\eta'|k) = e^2 c^2 \frac{\nu^2(\xi_a)}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{n'=-\infty}^{\infty} \{ J_{n+1}(\lambda') J_{n'+1}(\lambda') + J_{n-1}(\lambda') J_{n'-1}(\lambda') - 2\left(1+\frac{1}{\nu^2(\xi_a)}\right) J_n(\lambda') J_{n'}(\lambda') \} \cdot$$

$$\cdot e^{-i\frac{\omega}{c}\left(1+\nu^2(\xi_a)\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)\eta + i\frac{\omega}{c}n\eta + in\varphi} \; e^{i\frac{\omega}{c}\left(1+\nu^2(\xi_a)\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)\eta' - i\frac{\omega}{c}n'\eta' - in'\varphi} \tag{6.80}$$

mit $\lambda' = 2\frac{\omega}{\omega_0}\nu(\xi_a)\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}$ .

Danach läßt sich die Mittelung ausführen mit

$$\lim_{X\to\infty} \frac{1}{X} \int_{-\frac{X}{2}}^{\frac{X}{2}} d\eta\, e^{-i\eta\left\{\frac{\omega}{c}\left(1+\nu^2(\xi_a)\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)-\frac{\omega_0}{c}n\right\}} \int_{-\frac{X}{2}}^{\frac{X}{2}} d\eta'\, e^{i\eta'\left\{\frac{\omega}{c}\left(1+\nu^2(\xi_a)\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)-\frac{\omega_0}{c}n'\right\}}$$

$$= \lim_{X\to\infty} \frac{1}{X} \frac{\sin\frac{E_n X}{2}}{E_n/2} \frac{\sin\frac{E_{n'} X}{2}}{E_{n'}/2} = \lim_{X\to\infty} \frac{1}{X} \frac{\sin^2\frac{E_n X}{2}}{(E_n/2)^2}\, \delta_{nn'} \tag{6.81}$$

$$= 2\pi\, \delta(E_n)\, \delta_{nn'} \quad , \quad \text{mit } E_n = \frac{\omega}{c}\left(1+\nu^2(\xi_a)\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right) - \frac{\omega_0}{c}n \; .$$

Zusammengefaßt erhält man also

$$\overline{j^{*}_{\kappa l j \mu}(k)\, j^{\mu}_{\kappa l}(k)}(\xi) = \frac{\pi c^2 e^2 \nu^2(\xi)}{1+\nu^2(\xi)\sin^2\frac{\vartheta}{2}} \cdot \tag{6.82}$$

$$\cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{ \delta(\omega - \frac{n\omega_0}{1+\nu^2(\xi)\sin^2\frac{\vartheta}{2}}) [ J^2_{n+1}(\lambda) + J^2_{n-1}(\lambda) - 2\left(1+\frac{1}{\nu^2(\xi)}\right) J^2_n(\lambda) ] \}$$

mit $\lambda = 2n\nu(\xi)\frac{\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}}{1+\nu^2(\xi)\sin^2\frac{\vartheta}{2}}$ .

Der Übergang von $\lambda'$ zu $\lambda$ mit Hilfe der $\delta$-Funktion bewirkt eine Separation der Frequenz- und Winkelanteile, wie es für

die Abspaltung der Quanteneffekte wesentlich war (vergl. Kapitel 6.4)! Wir drücken das aus durch

$$\overline{j^{*}_{\kappa l;\mu}(k^{\circ},k^{\circ}\vec{n})\, j^{\mu}_{\kappa l}(k^{\circ},k^{\circ}\vec{n})}\,(\xi) \;=\; \bar{\jmath}_{\kappa l}(\xi|k^{\circ},\vec{n}) \qquad . \tag{6.83}$$

Schließlich erhalten wir mit $c\tau = \xi$ die klassische Verteilung der momentanen Strahlungsleistung

$$\frac{d\bar{P}(\tau)}{d\omega\, d\Omega} = \frac{1}{2c}\,\frac{f}{c^{3}}\,\frac{1}{(2\pi)^{3}}\,\omega^{2}\,\bar{\jmath}_{\kappa l}(\xi|\tfrac{\omega}{c},\vec{n})$$

$$= \frac{e^{2}\nu^{2}(\xi)}{4c}\,\frac{f}{(2\pi)^{2}}\,\frac{\omega^{2}}{1+\nu^{2}(\xi)\sin^{2}\frac{\vartheta}{2}}\,\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big\{\delta\Big(\omega-\frac{n\omega_{0}}{1+\nu^{2}(\xi)\sin^{2}\frac{\vartheta}{2}}\Big)[\,\ldots\,]\Big\} \tag{6.84}$$

und

$$\frac{d\bar{P}(\tau)}{d\Omega} \;=\; \int_{0}^{\infty} d\omega\,\frac{d\bar{P}(\tau)}{d\omega\, d\Omega} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d\bar{P}_{n}(\tau)}{d\Omega} \tag{6.85}$$

mit den harmonischen Komponenten

$$\frac{d\bar{P}_{n}(\tau)}{d\Omega} = \frac{e^{2}\nu^{2}(\frac{\tau}{c})}{4\pi c}\,\frac{f}{4\pi}\,\frac{\omega_{n}(\frac{\tau}{c})}{1+\nu^{2}(\frac{\tau}{c})\sin^{2}\frac{\vartheta}{2}}\,\Big\{J_{n+1}^{2}(\lambda)+J_{n-1}^{2}(\lambda)-2\Big(1+\frac{1}{\nu^{2}(\frac{\tau}{c})}\Big)J_{n}^{2}(\lambda)\Big\}$$

$$\text{mit}\quad \omega_{n}(\tfrac{\tau}{c}) = \frac{n\omega_{0}}{1+\nu^{2}(\frac{\tau}{c})\sin^{2}\frac{\vartheta}{2}} \qquad . \tag{6.86}$$

## 6.7 Der monochromatische Grenzfall

Mit Hilfe des klassischen Strahlungsspektrums (6.84) können wir jetzt das quantenelektrodynamische Photonenzahlspektrum angeben. Mit (6.70) ist

$$\frac{d^{2}N_{QT}}{d\hbar\omega\, d\Omega} \;=\; \frac{1}{\hbar}\int d\xi\,\bar{N}_{QT}(\omega,\vec{n},\tfrac{1}{c}\xi) \;=\; \frac{1}{\hbar}\int d\tau\,\bar{N}_{\kappa l}(\omega_{\lambda},\vec{n},\tau) \tag{6.70}$$

wobei

$$\bar{N}_{\kappa l}(\omega_{\lambda},\vec{n},\tau) \;=\; \frac{1}{\hbar\omega_{\lambda}}\,\frac{d\bar{P}_{\kappa l}(\tau)}{d\omega_{\lambda}\, d\Omega} = \tag{6.87}$$

$$= \frac{e^2 \nu^2(\xi)}{4\pi c} \frac{f}{(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{n\omega_0}{(1+\nu^2(\xi)\sin^2\frac{\vartheta}{2})^2} \delta(\omega_A - \frac{n\omega_0}{1+\nu^2(\xi)\sin^2\frac{\vartheta}{2}}) \left[ J_{n+1}^2(x) + J_{n-1}^2(x) - 2(1+\frac{1}{\nu^2(\xi)}) J_n^2(x) \right] \right\} .$$

Wir formen um:

$$\frac{n\omega_0}{(1+\nu^2\sin^2\frac{\vartheta}{2})^2} \delta(\omega_A - \frac{n\omega_0}{1+\nu^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}}) = \tag{6.88}$$

$$= \frac{n\omega_0}{1+\nu^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}} \frac{|1-2\frac{\omega}{\varkappa c}\sin^2\frac{\vartheta}{2}|}{|1+(\nu^2+2\frac{n\omega_0}{\varkappa c})\sin^2\frac{\vartheta}{2}|} \delta(\omega - \frac{n\omega_0}{1+(\nu^2+2\frac{n\omega_0}{\varkappa c})\sin^2\frac{\vartheta}{2}}) ;$$

$$|1-2\frac{\omega}{\varkappa c}\sin^2\frac{\vartheta}{2}| \delta(\ldots) = \frac{1+\nu^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}}{|1+(\nu^2+2\frac{n\omega_0}{\varkappa c})\sin^2\frac{\vartheta}{2}|} \delta(\ldots) \quad . \tag{6.89}$$

Zusammen also:

$$\frac{n\omega_0}{(1+\nu^2\sin^2\frac{\vartheta}{2})^2} \delta(\omega_A - \frac{n\omega_0}{1+\nu^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}}) = \frac{n\omega_0}{[1+(\nu^2+2\frac{n\omega_0}{\varkappa c})\sin^2\frac{\vartheta}{2}]^2} \delta(\omega - \frac{n\omega_0}{1+(\nu^2+2\frac{n\omega_0}{\varkappa c})\sin^2\frac{\vartheta}{2}})$$

$$= \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \frac{\omega_0}{n} \delta(\omega - \frac{n\omega_0}{1+(\nu^2+2\frac{n\hbar\omega_0}{mc^2})\sin^2\frac{\vartheta}{2}}) \quad , \tag{6.90}$$

und damit

$$\bar{N}_{QT}(\omega, \vec{n}, \frac{1}{c}\xi) = \frac{e^2\nu^2(\xi)}{4\pi c} \frac{f}{(2\pi)^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\omega_0}{n} \delta(\omega - \frac{n\omega_0}{1+(\nu^2(\xi)+2\frac{n\hbar\omega_0}{mc^2})\sin^2\frac{\vartheta}{2}}) \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \left[ J_{n+1}^2(x) + J_{n-1}^2(x) - 2(1+\frac{1}{\nu^2(\xi)}) J_n^2(x) \right] \right\} \tag{6.91}$$

Für die Winkelverteilung der abgestrahlten Photonen erhalten wir dann

$$\frac{dN_{QT}}{d\Omega} = \int_0^\infty d\hbar\omega \frac{dN_{QT}}{d\hbar\omega\, d\Omega} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dN_n}{d\Omega} = \sum_{n=1}^{\infty} \int d\xi\, \bar{N}_n(\vec{n}, \frac{1}{c}\xi) \tag{6.92}$$

mit

$$\bar{N}_n(\vec{n}, \tfrac{1}{c}\xi) = \frac{e^2\nu^2(\xi)}{4\pi\hbar c}\frac{f}{4\pi}\left(\frac{\omega_n}{\omega_0}\right)^2\frac{\omega_0}{n}\left\{J_{n+1}^2(\lambda)+J_{n-1}^2(\lambda)-2\left(1+\frac{1}{\nu^2(\xi)}\right)J_n^2(\lambda)\right\},$$

$$\omega_n = \frac{n\omega_0}{1+(2\frac{n\hbar\omega_0}{mc^2}+\nu^2(\xi))\sin^2\frac{\theta}{2}} \quad , \quad \lambda = 2n\nu(\xi)\frac{\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1+\nu^2(\xi)\sin^2\frac{\theta}{2}} \quad . \tag{6.93}$$

In dieser Darstellungsform erhält man die quantenelektrodynamische Verteilung aus der klassischen Verteilung durch einfache Ersetzung

$$\omega_n = \frac{n\omega_0}{1+\nu^2(\xi)\sin^2\frac{\theta}{2}} \longrightarrow \omega_n = \frac{n\omega_0}{1+(2\frac{n\hbar\omega_0}{mc^2}+\nu^2(\xi))\sin^2\frac{\theta}{2}} \quad . \tag{6.94}$$

Die Pulsformabhängigkeit der Verteilung erweist sich als von rein klassischer Natur. Der Übergang zum Grenzfall einer monochromatischen ebenen Welle kann daher auf der klassischen Ebene interpretiert werden und ist hier völlig unproblematisch. Die Amplitudenfunktion wird zu einer Konstanten $\nu(\xi) \longrightarrow \nu$ , die $\xi$ - Integration in (6.70) bzw. (6.92) muß ersetzt werden durch eine $\xi$ -Mittelung, was einer Mittelung über eine Periode gleichkommt.

$$\frac{dN_{qr}}{d\Omega} \longrightarrow \frac{d\bar{N}_{qr}}{d\Omega} = \int_0^\infty d\hbar\omega\,\frac{d\bar{N}_{qr}}{d\hbar\omega d\Omega} = \sum_{n=1}^\infty \frac{d\bar{N}_n}{d\Omega}$$

mit

$$\frac{d\bar{N}_n}{d\Omega} = \bar{N}_n(\vec{n}, \tfrac{1}{c}\xi)\Big|_{\nu=\text{const.}} \qquad \text{(vergl. 6.93)} \quad .$$

Bei der Intensität $I = \frac{f e^2 \nu^2 \omega_0^2}{(4\pi)^2 c\, r_0^2}$ der monochromatischen ebenen Welle erhält man damit den Streuquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{I}\frac{d\bar{N}}{d\Omega} = \sum_{n=1}^\infty \frac{d\sigma_n}{d\Omega} \tag{6.95}$$

mit

$$\frac{d\sigma_n}{d\Omega} = r_0^2 \left(\frac{\omega_n}{\omega_0}\right)^2 \frac{1}{n} \left\{ J_{n+1}^2(\lambda) + J_{n-1}^2(\lambda) - 2\left(1 + \frac{1}{\nu^2}\right) J_n^2(\lambda) \right\} ,$$

$$\omega_n = \frac{n\omega_0}{1 + (2\frac{n\hbar\omega_0}{mc^2} + \nu^2)\sin^2\frac{\vartheta}{2}} , \quad \lambda = 2n\nu \frac{\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}}{1+\nu^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}} ;$$

$r_0$ ist der klassische Elektronenradius: $r_0 = \frac{f}{4\pi}\frac{e^2}{mc^2}$ .
Damit ist der Anschluß an die bekannten speziellen Ergebnisse geleistet. (6.94) stimmt überein mit dem Ergebnis von BROWN/KIBBLE (1964). (Der entsprechende klassische Streuquerschnitt, den man aus 6.94 erhält durch die Ersetzung $\omega_n \to \frac{n\omega_0}{1+\nu^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}}$ , stimmt mit dem von SARACHIK/SCHAPPERT (1970) überein.)

## 7. Zusammenfassung der Ergebnisse

Die Wechselwirkung eines geladenen Teilchens mit einem intensiven Laserpuls wurde auf drei theoretischen Ebenen untersucht:

- Klassische Ebene: Die Invarianzgruppe einer ebenen Welle ist eine 5-parametrige Untergruppe der kinematischen Gruppe der lichtartigen Dynamik ("front form dynamics"). In Anpassung an diese Symmetrie des äußeren Feldes wurden lichtartige Koordinaten eingeführt und eine lichtartige Hamiltonmechanik für ein Teilchen im ebenen Wellenpotential entwickelt. Die kanonischen Bewegungsgleichungen wurden gelöst, und mit Hilfe von kanonischen Transformationen wurde die Symmetrie der Dynamik bereits auf der klassischen Ebene aufgedeckt: Die Dynamik eines relativistischen geladenen Teilchens in einem ebenen Wellenfeld ist kanonisch äquivalent der freien Dynamik, außerdem kanonisch äquivalent der nichtrelativistischen Dynamik in zwei Dimensionen für ein geladenes Teilchen in einem homogenen zeitabhängigen elektrischen Feld.

- Quantenmechanische Ebene: Die raumzeitliche Entwicklung von Volkov-Wellenpaketen, von denen eine explizite lichtartige Fourier-Darstellung bekannt ist, wurde analysiert. Eine Umformung der Fourier-Darstellung zeigte einen engen Zusammenhang zwischen den Fourier-Komponenten und den klassischen Teilchenbahnen. Eine Entwicklung nach zugeordneten Laguerre - Polynomen führte zu einer Darstellung, in der

man die Volkov-Wellenpakete als - bis auf einen Phasenfaktor - freie Wellenpakete erkennt, die längs der Bahn einer klassischen Punktladung im ebenen Wellenfeld verschoben sind. Den Phasenfaktor identifiziert man als Eichterm, der über passende Lorentztransformationen, die zugleich Invarianztransformationen des ebenen Wellenfeldes sind ("Kupersztych-Transformationen") kompensiert werden kann. Ergebnis: Relativ zu einem beschleunigten Bezugssystem, dessen Ursprung der Bewegung einer anfangs ruhenden Punktladung im ebenen Wellenfeld folgt, breiten sich die Volkov-Wellenpakete aus wie entsprechende freie Wellenpakete. Es treten keine weiteren Modulationen auf.

- Quantenelektrodynamische Ebene: Die auf der quantenmechanischen Ebene gefundenen neuen Darstellungen für Volkov-Wellenpaketlösungen wurden benutzt um die Laser-Compton-Streuung in einem realisitschen Wellenpuls zu berechnen. Die hierzu entwickelte Methode erlaubte es, im momentanen Ruhesystem einer klassischen Punktladung die Quanteneffekte zu separieren. Diese Separation ließ sich auf das Laborsystem übertragen. Als einzige Quantenkorrektur tritt damit eine Compton-Frequenzverschiebung des klassischen Strahlungsspektrums auf. Das Spektrum der momentanen Strahlungsleistung, gemittelt über eine Periode der Laser-Grundfrequenz wurde berechnet für einen realistischen Laser-Puls.
Nach der Separation der Quantenkorrekturen reduziert sich die Problematik des monochromatischen Grenzfalls auf eine rein klassische Fragestellung, und läßt sich damit auflösen.

Im monochromatischen zirkularpolarisierten Grenzfall wurden die bekannten Ergebnisse reproduziert, klassisch und quantenelektrodynamisch. Damit erscheinen auch die Ergebnisse gesichert, die für Prozesse höherer Ordnung im monochromatischen Grenzfall berechnet worden sind. Andererseits dürften die in dieser Arbeit entwickelten Methoden zur Behandlung pulsförmiger ebener Wellenfelder auch für Prozesse höherer Ordnung neue Lösungswege eröffnen.

## Anhang 1. Lichtartige Koordinaten

Lichtartige Koordinaten im Minkowski-Raum wurden erstmals von DIRAC (1949) vorgeschlagen zur Beschreibung der "Front Form" der relativistischen Hamiltondynamik.
Um 1968 tauchten sie wieder auf als "Infinite Momentum Frame" für den Hochenergie-Grenzfall in Strom-Algebren (Literaturangaben in ROHRLICH 1971). Mit ähnlicher Zielsetzung wurden dann verschiedene Versionen einer "Null Plane QED" ausgearbeitet (KOGUT/SOPER 1970; BJØRKEN/KOGUT/SOPER 1971; ROHRLICH 1970; TEN EYCK/ROHRLICH 1973, 1974). In Anpassung an die Symmetrie des äußeren Feldes (vergl. Kapitel 2) wurden lichtartige Koordinaten schließlich eingeführt zur Behandlung von Quantenprozessen in Laserfeldern (CHAKRABARTI 1968; NEVILLE 1968; NEVILLE/ROHRLICH 1971)

NEVILLE und ROHRLICH und in der Folge die Tübinger Lasergruppe um MITTER (vergl. etwa MITTER 1975) benutzen als Basis im Minkowski-Raum das Vierbein $\{\underline{m}, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{n}\}$

$$m^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -\vec{n}) \quad , \quad e_1^\mu = (0, \vec{e}_1) \quad , \quad e_2^\mu = (0, \vec{e}_2) \quad , \quad n^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \vec{n})$$

mit $$m_\mu m^\mu = n_\mu n^\mu = 0 \quad , \quad e_{1;\mu} e_1^\mu = e_{2;\mu} e_2^\mu = 1 \qquad \text{(A1.1)}$$

$$e_{i;\mu} m^\mu = e_{i;\mu} n^\mu = 0 \quad (i = 1,2) \quad , \quad m_\mu n^\mu = -1 \quad .$$

Ein 4-Vektor erfährt dadurch die Zerlegung

$$\underline{A} = \underline{m} A_- + \underline{e}_1 A_1 + \underline{e}_2 A_2 + \underline{n} A_+ \qquad \text{(A1.2)}$$

mit den Komponenten

$$A_u = -m_\mu \cdot A^\mu \quad , \quad A_v = -n_\mu A^\mu$$
$$A_1 = e_{1\mu} A^\mu \quad , \quad A_2 = e_{2\mu} A^\mu \qquad \text{(A1.3)}$$

Eine Unterscheidung von kovarianten und kontravarianten Komponenten, wie etwa $A^u = -A_v$, $A^v = -A_u$ usw., wird nicht durchgeführt. Diesem Vorgehen liegt eine Invarianten-Interpretation der Vektorkomponenten zugrunde (ROHRLICH 1971): Das Vierbein $\{\underline{m}, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{n}\}$ soll bei Lorentztransformationen mittransformiert werden, wodurch die obigen Vektorkomponenten als Skalarprodukte zweier 4-Vektoren invariant werden.

Im Gegensatz dazu soll in dieser Arbeit das sonst übliche Konzept verwendet werden mit einem festen Vierbein als Basis, das an ein ausgezeichnetes Inertialsystem, etwa das Laborsystem, gebunden bleibt. Dementsprechend unterscheiden wir nach ihrem Transformationsverhalten kovariante und kontravariante Tensorkomponenten. Als weitere Abweichung skalieren wir so, daß rationalisierte Koordinaten entstehen, ähnlich wie bei LEUTWYLER/STERN (1978). Basis ist nun das feste Vierbein $\{\underline{m}, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{n}\}$ mit

$$m^\mu = \tfrac{1}{2}(1, -\vec{n}) \quad , \quad e_1^\mu = (0, \vec{e}_1) \quad , \quad e_2^\mu = (0, \vec{e}_2) \quad , \quad n^\mu = (1, \vec{n}) \qquad \text{(A1.4)}$$

und den Orthogonalitäts- und Normierungsgleichungen wie in (A 1.1). Die kovarianten Komponenten eines 4-Vektors $\underline{A}$ bezüglich dieser Basis sind dann

$$A_{\tilde{0}} = u^{\mu} A_{\mu} = \tfrac{1}{2}(A_0 - \vec{n}\cdot\vec{A}) \quad , \quad A_{\tilde{3}} = u^{\mu} A_{\mu} = A_0 + \vec{n}\cdot\vec{A}$$

$$A_{\tilde{1}} = e_1^{\mu} A_{\mu} = \vec{e}_1 \cdot \vec{A} \quad , \quad A_{\tilde{2}} = e_2^{\mu} A_{\mu} = \vec{e}_2 \cdot \vec{A} \quad . \tag{A1.5}$$

Der metrische Fundamentaltensor nimmt die Form an

$$g_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} = g^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \tag{A1.6}$$

so daß

$$A^{\tilde{\mu}} = (A^{\tilde{0}}, A^{\tilde{1}}, A^{\tilde{2}}, A^{\tilde{3}}) = (-A_{\tilde{3}}, A_{\tilde{1}}, A_{\tilde{2}}, -A_{\tilde{0}}) \quad ,$$

also

$$A^{\tilde{0}} = -u_{\mu} A^{\mu} = A^0 - \vec{n}\cdot\vec{A} \quad , \quad A^{\tilde{3}} = -u_{\mu} A^{\mu} = \tfrac{1}{2}(A^0 + \vec{n}\cdot\vec{A})$$

$$A^{\tilde{1}} = e_{1;\mu} A^{\mu} = \vec{e}_1 \cdot \vec{A} \quad , \quad A^{\tilde{2}} = e_{2;\mu} A^{\mu} = \vec{e}_2 \cdot \vec{A} \quad . \tag{A1.7}$$

Das Skalarprodukt zweier 4-Vektoren wird

$$\underline{A}\cdot\underline{B} = A^{\mu} B_{\mu} = A^{\tilde{\mu}} B_{\tilde{\mu}} = -A^{\tilde{0}} B^{\tilde{3}} - A^{\tilde{3}} B^{\tilde{0}} + A^{\tilde{1}} B^{\tilde{1}} + A^{\tilde{2}} B^{\tilde{2}} , \tag{A1.8}$$

wobei die Summations-Konvention für doppelte Indizes mit Tilde identisch zu der üblichen für Indizes ohne Tilde gelten soll. Entsprechend laufen griechische Indizes mit Tilde von 0 bis 3, lateinische Indizes mit Tilde von 1 bis 3.

In Spezialisierung auf den 4-Vektor $\underline{\partial}$ erhalten wir nun

$$\partial_{\tilde{\mu}} = \left(\frac{\partial}{\partial x^{\tilde{0}}}, \frac{\partial}{\partial x^{\tilde{1}}}, \frac{\partial}{\partial x^{\tilde{2}}}, \frac{\partial}{\partial x^{\tilde{3}}}\right) = \left(-\frac{\partial}{\partial x_{\tilde{0}}}, \frac{\partial}{\partial x_{\tilde{1}}}, \frac{\partial}{\partial x_{\tilde{2}}}, -\frac{\partial}{\partial x_{\tilde{3}}}\right)$$

$$\partial^{\tilde{\mu}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_{\tilde{0}}}, \frac{\partial}{\partial x_{\tilde{1}}}, \frac{\partial}{\partial x_{\tilde{2}}}, \frac{\partial}{\partial x_{\tilde{3}}}\right) = \left(-\frac{\partial}{\partial x^{\tilde{0}}}, \frac{\partial}{\partial x^{\tilde{1}}}, \frac{\partial}{\partial x^{\tilde{2}}}, -\frac{\partial}{\partial x^{\tilde{3}}}\right) \qquad \text{(A1.9)}$$

und

$$\Box = \partial^{\tilde{\mu}}\partial_{\tilde{\mu}} = \partial^{\tilde{\mu}}\partial_{\tilde{\mu}} = -\frac{\partial^2}{\partial x^{\tilde{0}}\partial x^{\tilde{0}}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\tilde{1}}\partial x^{\tilde{1}}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\tilde{2}}\partial x^{\tilde{2}}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{\tilde{3}}\partial x^{\tilde{3}}} . \qquad \text{(A1.10)}$$

Das Volumenelement wird $d^4\tilde{x} = dx^{\tilde{0}}\,dx^{\tilde{1}}\,dx^{\tilde{2}}\,dx^{\tilde{3}}$ (A1.11)

und die Hyperflächenelemente $d\sigma^{\tilde{\mu}}(\tilde{x}) = dx^{\tilde{1}}\,dx^{\tilde{2}}\,dx^{\tilde{3}} = d^3\tilde{x}$

für die Hyperebenen $x^{\tilde{0}} = \text{const.}$, bzw. $d\sigma^{\tilde{0}}(\tilde{x}) = -dx^{\tilde{1}}\,dx^{\tilde{2}}\,dx^{\tilde{3}}$ (A1.12)

für die Hyperebenen $x^{\tilde{\mu}} = \text{const.}$.

Eine lichtartige Realisierung der Generatoren der Poincaré-Gruppe erhellt die strukturelle Bedeutung der lichartigen Koordinaten für die gesamte relativistische Physik (DIRAC 1949; KOGUT/SOPER 1970; LEUTWYLER/STERN 1978). Zur größeren Übersichtlichkeit legen wir dazu die Orientierung der Koordinatenachsen fest. Die 3-Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n}$ aus dem lichtartigen Vierbein bilden ein rechtshändiges orthonormiertes Dreibein

$$\vec{e}_1^{\,2} = \vec{e}_2^{\,2} = \vec{n}^2 = 1, \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}, \quad \vec{e}_i \cdot \vec{n} = 0 \quad (i,j = 1,2)$$

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{n}, \quad \vec{e}_1 \times \vec{n} = -\vec{e}_2, \quad \vec{e}_2 \times \vec{n} = \vec{e}_1 \qquad \text{(A1.13)}$$

Man kann daher ohne wirklichen Verlust an Allgemeinheit die Koordinatenachsen so orientieren, daß $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ bzw. $\vec{n}$ mit den räumlichen Basisvektoren in 1-, 2-, bzw. 3-Richtung des ursprünglichen pseudokartesischen Koordinatensystems zusammenfallen. Auf diese Weise wird

$$A^{\tilde{0}} \longrightarrow A^0 - A^3 = A^- \quad , \quad A^{\tilde{3}} \longrightarrow \tfrac{1}{2}(A^0 + A^3) = A^+$$
$$A^{\tilde{1}} \longrightarrow A^1 \quad , \quad A^{\tilde{2}} \longrightarrow A^2 \quad \text{usw.} \tag{A1.14}$$

Wir verwenden dann synonym die Bezeichnungen

$$A^{\tilde{\mu}} = (A^{\tilde{0}}, A^{\tilde{1}}, A^{\tilde{2}}, A^{\tilde{3}}) = (A^-, A^1, A^2, A^+) \tag{A1.15}$$

mit der zusätzlichen Summationskonvention für doppelte lateinische Indizes ohne Tilde über 1, 2, wenn aus dem Kontext hervorgeht, daß Komponenten des lichtartigen Systems gemeint sind, z.B.:

$$A^{\tilde{\mu}} B_{\tilde{\mu}} = -A^- B^+ - A^+ B^- + A^i B^i \quad . \tag{A1.16}$$

Der Übergang von zeitartigen zu lichtartigen Koordinaten wird jetzt durch einfache Matrizen vermittelt.

$$A^{\tilde{\mu}} = C^{\tilde{\mu}}{}_{\nu} A^{\nu} \quad , \quad A_{\tilde{\mu}} = C_{\tilde{\mu}}{}^{\nu} A_{\nu}$$

mit

$$C^{\tilde{\mu}}{}_{\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad , \quad C_{\tilde{\mu}}{}^{\nu} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{A1.17}$$

Wir verwenden die Poincaré-Algebra in der zeitartigen reellen Form (SUDARSHAN/MUKUNDA 1974, Chap. 20)

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \quad , \quad [M_{\mu\nu}, P_\varrho] = g_{\mu\varrho} P_\nu - g_{\nu\varrho} P_\mu$$
$$[M_{\mu\nu}, M_{\varrho\sigma}] = g_{\mu\varrho} M_{\nu\sigma} - g_{\nu\varrho} M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma} M_{\nu\varrho} + g_{\nu\sigma} M_{\mu\varrho} \tag{A1.18}$$

und $M_{jk} = \varepsilon_{jkl} J_l \quad , \quad M_{0j} = -M_{j0} = K_j \quad .$ (A1.19)

Dann wird $P_\mu = C_\mu^{\ \nu} P_\nu = (P_-, P_1, P_2, P_+)$ (A1.20)

und

$$M_{\mu\nu} = C_\mu^{\ \sigma} C_\nu^{\ \tau} M_{\sigma\tau} = \begin{bmatrix} 0 & F_1 & F_2 & K_3 \\ -F_1 & 0 & J_3 & -E_1 \\ -F_2 & -J_3 & 0 & -E_2 \\ -K_3 & E_1 & E_2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(A1.21)}$$

mit

$$E_1 = K_1 + J_2 \,, \; E_2 = K_2 - J_1 \,, \; F_1 = \tfrac{1}{2}(K_1 - J_2) \,, \; F_2 = \tfrac{1}{2}(K_2 + J_1) \,. \qquad \text{(A1.22)}$$

Die von Null verschiedenen Kommutatoren für diese Generatoren sind

$$\begin{aligned}
[E_i, P_j] &= -\delta_{ij} P_+ & [F_i, P_j] &= -\delta_{ij} P_- \\
[E_i, P_-] &= -P_i & [F_i, P_+] &= -P_i \\
[J_3, E_i] &= \varepsilon_{ij} E_j & [J_3, F_i] &= \varepsilon_{ij} F_j \\
[J_3, P_i] &= \varepsilon_{ij} P_j & [E_i, F_j] &= \varepsilon_{ij} J_3 - \delta_{ij} K_3 \\
[E_i, K_3] &= E_i & [P_+, K_3] &= P_+ \\
[F_i, K_3] &= -F_i & [P_-, K_3] &= -P_-
\end{aligned} \qquad \text{(A1.23)}$$

(vergl. LEUTWYLER/STERN 1978).

Kovariant geschrieben erhalten wir, formidentisch mit (A 1.18)

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \,, \quad [M_{\mu\nu}, P_\rho] = g_{\mu\rho} P_\nu - g_{\nu\rho} P_\mu$$

(A1.24)

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} + g_{\nu\sigma} M_{\mu\rho} \,.$$

Mehrere Untergruppen sind im Rahmen dieser Arbeit von besonderem Interesse.

- Die Stabilitätsgruppe $S_+$ der lichtartigen Hyperebene $x^- = 0$ . Sie wird erzeugt von den 7 Generatoren

$$P_1, P_2, P_+, E_1, E_2, J_3, K_3$$

- Die gemeinsame Stabilitätsgruppe $K_+$ aller Hyperebenen $x^- = \text{const}$. Diese Untergruppe von $S_+$ mit den 6 Generatoren

$$P_1, P_2, P_+, E_1, E_2, J_3$$

kann als kinematische Gruppe einer lichtartigen Dynamik aufgefaßt werden.

- Die Erweiterung der kinematischen Gruppe um $P_-$. Diese Untergruppe ist isomorph einer Galilei-Gruppe in zwei Dimensionen, wenn man identifiziert:

$$H = -P_- = P^+ \quad \text{und} \quad M = -P_+ = P^- \,.$$

Hieraus resultiert die große Ähnlichkeit der lichtartigen Dynamik mit nichtrelativistischer Physik.

- Die Invarianzgruppe $I_+$ einer ebenen Welle.
Die Untergruppe von $K_+$ mit den 5 Generatoren

$$P_1, P_2, P_+, E_1, E_2$$

läßt den elektromagnetischen Feldtensor einer ebenen Welle, die sich in $x_3$-Richtung ausbreitet, invariant (vergl. Kapitel 2).

Ausgehend von der definierenden Matrixdarstellung der Lorentz-Algebra bezogen auf zeitartige Koordinaten

$$(M_{\mu\nu})^{\alpha}{}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\nu} g_{\mu\beta} - \delta^{\alpha}_{\mu} g_{\nu\beta} \qquad \text{(A1.25)}$$

erhalten wir mit Hilfe von (A 1.17) eine lichtartige Matrixdarstellung insbesondere für $E_1$ und $E_2$

$$(E_1)^{\tilde{\alpha}}{}_{\tilde{\beta}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (E_2)^{\tilde{\alpha}}{}_{\tilde{\beta}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad \text{(A1.26)}$$

Für diese nilpotenten Matrizen gilt bei Multiplikation mit den Parametern $u_1$ und $u_2$

$$u_i E_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ -u_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -u_1 & -u_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (u_i E_i)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_i u_i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(A1.27)}$$

und $(u_i E_i)^n = 0 \quad$ für $n > 2$,

also

$$e^{u_i E_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -u_1 & 1 & 0 & 0 \\ -u_2 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} u_i u_i & -u_1 & -u_2 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \text{(A1.28)}$$

Wir identifizieren somit $E_1$ und $E_2$ als die beiden Generatoren der "Kupersztych-Transformationen" $\Lambda_{(k)}$ (2.17)!

## Anhang 2. Relativistische kovariante Hamilton-Mechanik

In einer explizit kovarianten Formulierung der relativistischen Mechanik treten singuläre Lagrangefunktionen auf, d.h.

$$\mathrm{Det}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^\mu \partial \dot{x}^\nu}\right) = 0 \quad . \tag{A2.1}$$

Das hat zur Folge, daß die Geschwindigkeiten $\dot{x}^\mu$ nicht alle in kanonischen Impulsen $p_\mu = \partial L/\partial \dot{x}^\mu$ ausgedrückt werden können, da Nebenbedingungen auftreten. Ein allgemeines Verfahren zur Behandlung von Hamilton-Systemen mit Nebenbedingungen hat DIRAC entwickelt (DIRAC 1950, 1964; HANSON/REGGE/TEITELBOIM 1976).

Wir wollen hier einen anderen Zugang zu einer explizit kovarianten Hamiltonformulierung für ein Teilchen in einem äußeren Feld angeben. Dieser Zugang greift auf den "homogenen Formalismus" zurück, der ebenfalls von DIRAC ausgearbeitet worden ist (DIRAC 1933; MITTELSTAEDT 1970 §7.3, §8.1).

Ausgangspunkt sei das nicht explizit kovariante Wirkungsfunktional

$$W[x_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt' L(x_i, \dot{x}_i, t') \quad . \tag{A2.2}$$

Notwendige Bedingung für eine explizit kovariante Formulierung ist, daß die Zeit t ihre Sonderstellung als unabhängiger Parameter verliert. Man führt dazu einen neuen unabhängigen Parameter $\lambda$ ein und faßt alle Koordinaten und die Zeit als Funktionen dieses Parameters auf.

$$t = t(\lambda) =: \frac{1}{c}\bar{x}^0(\lambda) \quad , \quad x_i = x_i(t(\lambda)) =: \bar{x}^i(\lambda)$$

$$dt = \frac{dt}{d\lambda}d\lambda = \frac{1}{c}\frac{d\bar{x}^0}{d\lambda}d\lambda \quad , \quad \dot{x}_i = \frac{d}{dt}x_i(t) = \frac{c}{\frac{d\bar{x}^0}{d\lambda}}\frac{d\bar{x}^i}{d\lambda} \quad . \tag{A2.3}$$

Für das Wirkungsfunktional folgt damit

$$W[x_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt' L(x_i, \dot{x}_i, t') = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda' \bar{L}(\bar{x}^\mu, \frac{d\bar{x}^\mu}{d\lambda}) = \bar{W}[\bar{x}^\mu(\lambda)] \quad ,$$

wobei (A2.4)

$$\bar{L}(\bar{x}^\mu, \frac{d\bar{x}^\mu}{d\lambda}) = \frac{1}{c}\frac{d\bar{x}^0}{d\lambda} L(\bar{x}^i(\lambda), \frac{1}{c}\bar{x}^0(\lambda), c\frac{d\bar{x}^i}{d\lambda}/\frac{d\bar{x}^0}{d\lambda}) \quad ; \mu = 0,1,2,3$$

Nun führt man konjugierte Impulse ein

$$\bar{p}_\mu = \frac{\partial \bar{L}}{\partial(\frac{d\bar{x}^\mu}{d\lambda})} \tag{A2.5}$$

und erhält damit eine kanonische Hamiltonfunktion

$$\bar{H}_c = \bar{p}_\mu \frac{d\bar{x}^\mu}{d\lambda} - \bar{L} = \bar{H}_c(\bar{x}^\mu, \bar{p}_\mu, \frac{d\bar{x}^\mu}{d\lambda}) \quad . \tag{A2.6}$$

Nun ist aber $$\frac{d\bar{x}^\mu}{d\lambda}\frac{\partial \bar{L}}{\partial(\frac{d\bar{x}^\mu}{d\lambda})} = \bar{L} \quad . \tag{A2.7}$$

$\bar{L}$ ist also eine homogene Funktion vom ersten Grad in $\frac{d\bar{x}^\mu}{d\lambda}$, und es lassen sich deshalb nur höchstens drei Geschwindigkeiten aus $\bar{H}_c$ eliminieren. Außerdem ist $\bar{H}_c = 0$, was einer Nebenbedingung für die kanonischen Koordinaten gleichkommt.

Im konkreten Fall des relativistischen Teilchens in einem äußeren elektromagnetischen Feld ist

$$L(x_i, \dot{x}_i, t) = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{x},t)\dot{\vec{x}} - e\varphi(\vec{x},t) \tag{A2.2a}$$

(LANDAU/LIFSCHITZ 1973 § 16) und über (A 2.4):

$$\bar{L}(\bar{x}^\mu, \frac{d\bar{x}^\mu}{d\lambda}) = -mc\sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{d\bar{x}^\mu}{d\lambda}\frac{d\bar{x}^\nu}{d\lambda}} + \frac{e}{c}\frac{d\bar{x}^\mu}{d\lambda} g_{\mu\nu}\bar{A}^\nu(\bar{x}^\mu)$$

mit (A2.4a)

$$\bar{A}^\nu(\bar{x}^\mu) = \left(\varphi(\bar{x}^i, \tfrac{1}{c}\bar{x}^0), \vec{A}(\bar{x}^i, \tfrac{1}{c}\bar{x}^0)\right) \quad ; \quad g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Für die kanonisch konjugierten Impulse erhält man dann

$$\bar{P}_\mu = mc\frac{g_{\mu\nu}\frac{d\bar{x}^\nu}{d\lambda}}{\sqrt{-g_{\varrho\sigma}\frac{d\bar{x}^\varrho}{d\lambda}\frac{d\bar{x}^\sigma}{d\lambda}}} + \frac{e}{c} g_{\mu\nu}\bar{A}^\nu(\bar{x}) \qquad \text{(A2.5a)}$$

und für die kanonische Hamiltonfunktion

$$\bar{H}_c = \frac{\sqrt{-g_{\varrho\sigma}\frac{d\bar{x}^\varrho}{d\lambda}\frac{d\bar{x}^\sigma}{d\lambda}}}{mc}\left\{g^{\mu\nu}\left(\bar{P}_\mu - \frac{e}{c}g_{\mu\varrho}\bar{A}^\varrho(\bar{x})\right)\left(\bar{P}_\nu - \frac{e}{c}g_{\nu\sigma}\bar{A}^\sigma(\bar{x})\right) + m^2c^2\right\} \qquad \text{(A2.6a)}$$

mit $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$. Man entnimmt nun aus (A 2.5a) die Nebenbedingung

$$\Psi = g^{\mu\nu}\left(\bar{P}_\mu - \frac{e}{c}g_{\mu\varrho}\bar{A}^\varrho(\bar{x})\right)\left(\bar{P}_\nu - \frac{e}{c}g_{\nu\sigma}\bar{A}^\sigma(\bar{x})\right) + m^2c^2 = 0 \qquad \text{(A2.8)}$$

Die Herleitung von kanonischen Bewegungsgleichungen stellt sich nun wegen (A 2.7) und (A 2.8) als Variationsaufgabe

$$\delta W = \delta\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda'\left(\bar{P}_\mu\frac{d\bar{x}^\mu}{d\lambda'}\right) = 0 \qquad \text{(A2.9)}$$

mit der Nebenbedingung $\Psi = 0$

dar, die wir mit der Methode der Lagrange-Parameter lösen. Wir erhalten

$$\frac{d\bar{x}^\mu}{d\lambda} = v(\lambda)\frac{\partial}{\partial\bar{P}_\mu}\Psi(\bar{P}_\nu, \bar{x}^\nu) = v(\lambda)\cdot 2g^{\mu\nu}\left(\bar{P}_\nu - \frac{e}{c}g_{\nu\varrho}\bar{A}^\varrho(\bar{x})\right) \qquad \text{(A2.10.1)}$$

$$-\frac{d\bar{P}_\mu}{d\lambda} = v(\lambda)\frac{\partial}{\partial\bar{x}^\mu}\Psi(\bar{P}_\nu, \bar{x}^\nu) \qquad \text{(A2.10.2)}$$

Aus (A 2.10.1) und (A 2.8) folgt

$$g_{\mu\nu}\frac{d\bar{x}^\mu}{d\lambda}\frac{d\bar{x}^\nu}{d\lambda} = 4v^2(\lambda)g^{\mu\nu}\left(\bar{p}_\mu - \frac{e}{c}g_{\mu\varrho}\bar{A}^\varrho\right)\left(\bar{p}_\nu - \frac{e}{c}g_{\nu\sigma}\bar{A}^\sigma\right) = -m^2c^2, \quad \text{(A2.11)}$$

und wir können den Lagrange-Parameter $v(\lambda)$ bestimmen

$$v(\lambda) = \frac{\sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{d\bar{x}^\mu}{d\lambda}\frac{d\bar{x}^\nu}{d\lambda}}}{2mc} \quad . \quad \text{(A2.12)}$$

Aus (A 2.10.1) und (A 2.10.2) werden dann mit (A 2.6a) die kanonischen Bewegungsgleichungen für ein relativistisches Teilchen in einem äußeren Potential

$$\frac{d\bar{x}^\mu}{d\lambda} = \frac{\partial\bar{H}}{\partial\bar{p}_\mu} \quad , \quad -\frac{d\bar{p}_\mu}{d\lambda} = \frac{\partial\bar{H}}{\partial\bar{x}^\mu} \quad \text{(A2.13)}$$

mit der Hamiltonfunktion (vergl. (A 2.6a)).

$$\bar{H} = \bar{H}(\lambda) = \frac{1}{2}\bar{H}_c \quad . \quad \text{(A2.14)}$$

Man kann nun die Koordinaten des homogenen Formalismus $\bar{x}^\mu$ bzw. $\bar{p}_\mu$ als kontravariante bzw. kovariante Komponenten von Minkowski-4-Vektoren identifizieren und $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ als Komponenten des metrischen Fundamentaltensors in zeitartiger Darstellung. Entsprechend werden dann die Tensorregeln für das Heraufziehen und Herunterziehen von Indizes wirksam. Wir haben auf diese Weise einen explizit kovarianten Hamiltonformalismus gewonnen, der noch einen Eichfreiheitsgrad für die Wahl des Parameters $\lambda$ enthält. Die Festlegung dieser Eichung entspricht einer zweiten Nebenbedingung, die es erlaubt, die Geschwindigkeiten $\frac{d\bar{x}^\mu}{d\lambda}$ aus der Hamiltonfunktion zu eliminieren. Wählt man z.B. als Parameter die Eigenzeit

$$c\,d\tau = \sqrt{-\frac{d\bar{x}_\varrho}{d\lambda}\frac{d\bar{x}^\varrho}{d\lambda}}\,d\lambda \quad ; \quad \bar{H}(\tau)\,d\tau = \bar{H}(\lambda)\,d\lambda \quad , \quad \text{(A2.15)}$$

so erhält man (die Querstriche können wir jetzt weglassen)

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{\partial H(\tau)}{\partial p_\mu} \quad , \quad -\frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{\partial H(\tau)}{\partial x^\mu}$$

mit (A2.16)

$$H(\tau) = \frac{1}{2m}\left\{\left(p_\mu - \frac{e}{c}A_\mu(x)\right)\left(p^\mu - \frac{e}{c}A^\mu(x)\right) + m^2c^2\right\}$$

(vergl. JACKSON 1975, Sect. 12.1).

Zur Diskussion der kanonischen Transformationen im Rahmen der kovarianten relativistischen Hamilton-Mechanik greifen wir wieder auf den homogenen Formalismus zurück. Die generalisierten Koordinaten $\bar{x}^\mu, \bar{p}_\mu$ spannen einen 8-dimensionalen parametrischen Phasenraum auf. Die Metrik dieses Phasenraums wird durch die Poisson-Klammer des homogenen Formalismus charakterisiert:

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \frac{\partial \bar{a}}{\partial \bar{x}^\mu}\frac{\partial \bar{b}}{\partial \bar{p}_\mu} - \frac{\partial \bar{a}}{\partial \bar{p}_\mu}\frac{\partial \bar{b}}{\partial \bar{x}^\mu} \qquad \text{(A2.17)}$$

für zwei Funktionen $\bar{a}(\bar{x}^\mu, \bar{p}_\mu)$ und $\bar{b}(\bar{x}^\mu, \bar{p}_\mu)$.

Ohne Berücksichtigung der Nebenbedingung $\bar{H} = 0$ wird man eine invertierbare Transformation $\bar{x}'^\mu = \bar{x}'^\mu(\bar{x}^\nu, \bar{p}_\nu, \lambda)$, $\bar{p}'_\mu = \bar{p}'_\mu(\bar{x}^\nu, \bar{p}_\nu, \lambda)$ dieses Phasenraums kanonisch nennen, wenn zu jeder Hamiltonfunktion $\bar{H}(\bar{x}^\mu, \bar{p}_\mu)$ eine Funktion $\bar{H}'(\bar{x}'^\mu, \bar{p}'_\mu)$ exisitiert, so daß mit $\frac{d\bar{x}^\mu}{d\lambda} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_\mu}$ , $-\frac{d\bar{p}_\mu}{d\lambda} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{x}^\mu}$

auch $\frac{d\bar{x}'^\mu}{d\lambda} = \frac{\partial \bar{H}'}{\partial \bar{p}'_\mu}$ , $-\frac{d\bar{p}'_\mu}{d\lambda} = \frac{\partial \bar{H}'}{\partial \bar{x}'^\mu}$ gilt.

Das ist genau dann der Fall (in einem topologisch einfach zusammenhängenden Gebiet des Phasenraums), wenn eine Konstante $z \neq 0$ existiert, so daß

$$\left[\bar{a}, \bar{b}\right]_{\bar{x}^\mu, \bar{p}_\mu} = z \left[\bar{a}, \bar{b}\right]_{\bar{x}'^\mu, \bar{p}'_\mu} \quad \text{für alle } \bar{a}, \bar{b} \qquad \text{(A2.18)}$$

(vergl. SALETAN/CROMER 1974 Kap. 6.3).

Für den homogenen Formalismus und damit insbesondere für die kovariante relativistische Hamiltonmechanik (A 2.13), (A 2.14) ist nun aber die generelle Nebenbedingung $\bar{H} = 0$ zu berücksichtigen, die die gesamte Dynamik auf eine 7-dimensionale Hyperfläche des homogenen Phasenraums beschränkt. Es ist daher nur die Teilklasse der kanonischen Transformationen dynamisch sinnvoll, welche diese Hyperfläche invariant läßt, d.h. $\bar{H}' = 0$ oder $\bar{H}' = \bar{H}$ .
Die Invarianz (bis auf einen Faktor) der Poissonklammern (A 2.18) ist aber kein hinreichendes Kriterium zur Charakterisierung dieser Teilklasse. Hierfür eignet sich vielmehr die Methode der erzeugenden Funktionen. Danach ist eine Transformation $\bar{x}'^\mu = \bar{x}'^\mu(\bar{x}^\mu, \bar{p}_\mu, \lambda)$ , $\bar{p}'_\mu = \bar{p}'_\mu(\bar{x}^\mu, \bar{p}_\mu, \lambda)$ genau dann kanonisch (im beschränkten Sinn, d.h. z = 1), wenn ein $\bar{F}(\bar{x}^\mu, \bar{p}_\mu, \lambda)$ exisitiert, so daß

$$\left(\bar{p}_\mu \frac{d\bar{x}^\mu}{d\lambda} - \bar{H}\right) - \left(\bar{p}'_\mu \frac{d\bar{x}'^\mu}{d\lambda} - \bar{H}'\right) = \frac{d\bar{F}}{d\lambda} \quad . \qquad \text{(A2.19)}$$

Zwischen $\bar{H}$ und $\bar{H}'$ besteht dann die Beziehung

$$\bar{H}' - \bar{H} - \frac{\partial \bar{p}'_\mu}{\partial \lambda} \bar{p}'_\mu = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \lambda} \qquad \text{(A2.20)}$$

(vergl. SALETAN/CROMER 1974 Kap. 6.4).
Dynamisch sinnvoll ist die Teilklasse der kanonischen Transformationen "im engeren Sinn"

$$\bar{x}'^{\mu} = \bar{x}'^{\mu}(\bar{x}^{\mu}, \bar{p}_{\mu}) \;,\; \bar{p}'_{\mu} = \bar{p}'_{\mu}(\bar{x}^{\mu}, \bar{p}_{\mu}) \;,\; \bar{H}' = \bar{H} \qquad \text{(A2.21)}$$

Diese werden eindeutig bestimmt über die Existenz einer erzeugenden Funktion $\bar{F}(\bar{x}^{\mu}, \bar{p}_{\mu})$ mit $\frac{\partial \bar{F}}{\partial \tau} = 0$ .

In Anwendung auf die kovariante Hamilton-Mechanik definieren wir dann relativistische kanonische Transformationen über geeignete erzeugende Funktionen und unterscheiden vier Grundtypen

$$\begin{aligned}
&F_1(x^{\mu}, x'^{\nu}) \;,\; p_{\mu} = \frac{\partial F_1}{\partial x^{\mu}} \;,\; p'_{\mu} = -\frac{\partial F_1}{\partial x'^{\mu}} \;,\; H' = H \\
&F_2(x^{\mu}, p'_{\nu}) \;,\; p_{\mu} = \frac{\partial F_2}{\partial x^{\mu}} \;,\; x'^{\mu} = \frac{\partial F_2}{\partial p'_{\mu}} \;,\; H' = H \\
&F_3(p_{\mu}, x'^{\nu}) \;,\; x^{\mu} = \frac{\partial F_3}{\partial p_{\mu}} \;,\; p'_{\mu} = -\frac{\partial F_3}{\partial x'^{\mu}} \;,\; H' = H \\
&F_4(p_{\mu}, p_{\nu}') \;,\; x^{\mu} = \frac{\partial F_4}{\partial p_{\mu}} \;,\; x'^{\mu} = \frac{\partial F_4}{\partial p'_{\mu}} \;,\; H' = H \;.
\end{aligned} \qquad \text{(A2.22)}$$

## Anhang 3. Die klassische Strahlungsformel

Ausgangspunkt ist die klassische Elektrodynamik in Lorentz-Eichung und c g s - Einheiten. In der Literatur wird hierbei in der Regel das Gauß'sche Maßsystem verwendet, während in quantenelektrodynamischen Arbeiten das Heaviside-Lorentz-System vorherrscht. Um den Vergleich von quantentheoretischen Ausdrücken mit entsprechenden klassischen übersichtlich zu gestalten, verwenden wir für beide Bereiche durchgängig eine Maßsystemkonstante f, die man dann jederzeit für das gewünschte Maßsystem spezifizieren kann

$$f = \begin{cases} 4\pi \text{ im Gauß-System} \\ 1 \text{ im Heaviside-Lorentz-System} \end{cases} \qquad \text{(A3.1)}$$

Aus der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{f}\left(\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2\right) + \frac{1}{c}j_\mu A^\mu \qquad \text{(A3.2)}$$

mit $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

leitet man die Euler-Lagrange-Gleichungen ab

$$\Box A^\mu = -\frac{f}{c}j^\mu \qquad \text{(A3.3)}$$

mit den retardierten und avancierten Lösungen

$$A_R^\mu(x) = \frac{f}{c}\int D_R(x-x')\,j^\mu(x')\,d^4x'$$
$$A_A^\mu(x) = \frac{f}{c}\int D_A(x-x')\,j^\mu(x')\,d^4x' \qquad \text{(A3.4)}$$

Dabei sind

$$D_R(x) = D_P(x) + \frac{1}{2}D(x) = \frac{1}{4\pi}\delta(x^2)[1+\varepsilon(x)] = \frac{1}{2\pi}\theta(x^0)\delta(x^2)$$
$$D_A(x) = D_P(x) - \frac{1}{2}D(x) = \frac{1}{4\pi}\delta(x^2)[1-\varepsilon(x)] = \frac{1}{2\pi}\theta(-x^0)\delta(x^2) \qquad \text{(A3.5)}$$

die entsprechenden Lösungen der inhomogenen Green-Funktions-Gleichung

$$\Box G(x-x') = -\delta(x-x') \quad . \tag{A3.6}$$

Der gesamte von einer Stromdichteverteilung $j^\mu(x)$ an das Strahlungsfeld abgegebene 4-Impuls, also der 4-Impuls, der aus einem Raumzeitvolumen V, das von der Hyperfläche $\sigma$ begrenzt ist, vom Strahlungsfeld wegtransportiert wird, ist

$$P^\mu_{Rad} = -\frac{1}{c}\int_\sigma \theta^{\mu\nu}\, d\sigma_\nu = -\frac{1}{c}\int_V d^4x\, \partial_\nu \theta^{\mu\nu} = -\frac{1}{c}\int d^4x\, \partial_\nu \theta^{\nu\mu} \tag{A3.7}$$

$\theta^{\mu\nu}$ ist der symmetrisierte, eichinvariante Energie-Impuls-Tensor für das Strahlungsfeld

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\left(F^{\mu\lambda}F_\lambda{}^\nu + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\lambda\varrho}F^{\lambda\varrho}\right) . \tag{A3.8}$$

Für $j^\mu \neq 0$ gilt die Beziehung

$$\partial_\mu \theta^{\mu\nu} = -\frac{1}{c} j_\mu F^{\mu\nu}_R \qquad \text{mit } F^{\mu\nu}_R = \partial^\mu A^\nu_R - \partial^\nu A^\mu_R \, . \tag{A3.9}$$

Damit ist

$$P^\mu_{Rad} = -\frac{1}{c^2}\int d^4x\, F^{\mu\nu}_R(x)\, j_\nu(x) \quad , \tag{A3.10}$$

und insbesondere

$$P^0 = -\frac{1}{c^2}\int d^4x F^{0\nu} j_\nu = -\frac{1}{c^2}\int d^4x F^{0i} j_i = -\frac{1}{c^2}\int d^4x\, \vec{E}\cdot\vec{j} \tag{A3.11}$$

d.h.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, P(t) = -\frac{1}{c}\int d^4x\, \vec{E}\cdot\vec{j} = -\int dt\, d^3x\, \vec{E}\cdot\vec{j} \, , \tag{A3.12}$$

also $P(t) = -\int d^3x\, \vec{E}\cdot\vec{j}$

in Übereinstimmung mit SCHWINGER (1949).

Nun zerlegt man

$$P^\mu = -\frac{1}{c^2}\int d^4x\, F_R^{\mu\nu} j_\nu = \frac{1}{2c^2}\int d^4x \{ j_\nu (F_R^{\nu\mu} - F_A^{\nu\mu}) + j_\nu (F_R^{\nu\mu} + F_A^{\nu\mu}) \} . \quad \text{(A3.13)}$$

Der zweite Term ist als Trägheitsterm ohne Bedeutung. Für Punktladungen wird er durch Massenrenormierung zum Verschwinden gebracht (vergl. THIRRING 1958, p. 25). Damit wird

$$P^\mu = \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\int d^4x\, j_\nu F_{Rad}^{\nu\mu} \qquad \text{mit } F_{Rad}^{\nu\mu} = \partial^\nu A_{Rad}^\mu - \partial^\mu A_{Rad}^\nu \quad \text{(A3.14)}$$

$$\text{und } A_{Rad}^\mu(x) = A_R^\mu(x) - A_A^\mu(x) = \frac{f}{c}\int (D_R(x-x') - D_A(x-x')) j^\mu(x')\, d^4x'$$

$$= \frac{f}{c}\int D(x-x') j^\mu(x')\, d^4x' \quad \text{(A3.15)}$$

$$\text{mit } D(x) = \frac{1}{2\pi}\varepsilon(x^0)\delta(x^2) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4k\, \varepsilon(k^0)\delta(k^2)\, e^{ikx} . \quad \text{(A3.16)}$$

Wir erhalten

$$P^\mu = \frac{1}{2}\frac{f}{c^3}\int d^4x\, d^4x' \{ j_\nu(x)\partial^\nu D(x-x') j^\mu(x') - j_\nu(x) j^\nu(x')\partial^\mu D(x-x') . \quad \text{(A3.17)}$$

Der erste Term fällt nach einer partiellen Integration und wegen $\partial^\nu j_\nu(x) = 0$ weg. Damit wird schließlich

$$P^\mu = -\frac{1}{2}\frac{f}{c^3}\int d^4x\, d^4x'\, j_\nu(x) j^\nu(x')\partial^\mu D(x-x')$$

$$= \frac{-i}{2(2\pi)^3}\frac{f}{c^3}\int d^4x\, d^4x'\, d^4k\, j_\nu(x) j^\nu(x') (ik^\mu)\varepsilon(k^0)\delta(k^2) e^{ik(x-x')}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{f}{c^3}\int d^4k\, \varepsilon(k^0)\delta(k^2) k^\mu j_\nu(-k) j^\nu(k) \quad \text{(A3.18)}$$

$$= \frac{f}{c^3}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4k\, \Theta(k^0)\delta(k^2) k^\mu j_\nu(-k) j^\nu(k)$$

$$= \frac{f}{c^3}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4k\, \Theta(k^0)\delta(k^2) k^\mu \left| j(k) \right|^2$$

mit $j_\nu(k) = \int d^4x\, j_\nu(x)\, e^{-ikx}$ , $|j(k)|^2 = j^*_\mu(k)\, j^\mu(k) = j_\mu(-k)\, j^\mu(k)$ .

Literatur zu diesem Anhang: ROHRLICH (1965); THIRRING (1958).

## Anhang 4. Die quantentheoretische Strahlungsformel

Ausgangspunkt ist die skalare Elektrodynamik in Lorentz-Eichung und c g s - Einheiten (klassische Feldtheorie).
Aus der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = -(D_\mu \phi)^*(D^\mu \phi) - \varkappa^2 \phi^* \phi - \frac{1}{f}\left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2\right) \qquad \text{(A4.1)}$$

mit $D_\mu = \partial_\mu - i\varepsilon A_\mu$ , $\varepsilon = \frac{e}{\hbar c}$ , $\varkappa = \frac{mc}{\hbar}$

leitet man die Euler-Lagrange-Gleichungen ab

$$\{(D_\mu D^\mu - \varkappa^2)\phi\}^* = 0$$

$$(D_\mu D^\mu - \varkappa^2)\phi = 0 \qquad \text{(A4.2)}$$

$$\Box A^\nu = -\frac{f}{c} J^\nu$$

mit $J^\nu = -i\varepsilon c\{\phi^*(D^\nu \phi) - (D^\nu \phi)^* \phi\}$ (A4.3)

und der Maßsystemkonstanten (vergl. Anhang 3)

$$f = \begin{cases} 4\pi & \text{im Gauß-System} \\ 1 & \text{im Heaviside-Lorentz-System.} \end{cases}$$

Daraus bestimmt man den Wechselwirkungsanteil einer Hamilton-Dichte, die als Ausgangspunkt für eine kanonische Quantisierung geeignet ist

$$\mathcal{H}_{Int} = i\varepsilon A_\mu \phi^* \overleftrightarrow{\partial^\mu} \phi + \varepsilon^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi \qquad \text{(A4.4)}$$

(vergl. ROHRLICH 1950).
Kanonische Quantisierung und Übergang ins Wechselwirkungsbild liefert

$$\hat{\mathcal{H}}_{int} = i\varepsilon \hat{a}_\mu \hat{\varphi}^* \overleftrightarrow{\partial^\mu} \hat{\varphi} + \varepsilon^2 \hat{a}_\mu \hat{a}^\mu \hat{\varphi}^* \hat{\varphi} \qquad \text{(A4.5)}$$

mit den freien Feldoperatoren $\hat{a}_\mu$, $\hat{\varphi}^*$, $\hat{\varphi}$

und den Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned}
&[\hat{\varphi}(x), \hat{\varphi}(x')] = [\hat{\varphi}^*(x), \hat{\varphi}^*(x')] = 0 \\
&[\hat{\varphi}^*(x), \hat{\varphi}(x')] = [\hat{\varphi}(x), \hat{\varphi}^*(x')] = \frac{\hbar c}{i} \Delta(x-x') \\
&[\hat{\pi}_\varphi(x), \hat{\varphi}(x')] = \frac{\hbar c}{i} \partial_0 \Delta(x-x') \quad , \quad [\hat{\pi}_{\varphi^*}(x), \hat{\varphi}^*(x')] = \frac{\hbar c}{i} \partial_0 \Delta(x-x') \\
&[\hat{a}_\mu(x), \hat{a}_\nu(x')] = \frac{\hbar c}{i} g_{\mu\nu} f D(x-x'), \quad [\hat{\pi}_\mu(x), a_\nu(x')] = \frac{\hbar c}{i} g_{\mu\nu} \partial_0 D(x-x') .
\end{aligned} \qquad \text{(A4.6)}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}
&\hat{\pi}_\varphi(x) = \partial_0 \hat{\varphi}^*(x) \quad , \quad \hat{\pi}_{\varphi^*} = \partial_0 \hat{\varphi}(x) \\
&\hat{\pi}_i(x) = \frac{1}{f} \hat{f}^{i0} = \frac{1}{f}(\partial^i \hat{a}^0 - \partial^0 \hat{a}^i) \quad , \quad \pi_0 = -\frac{1}{f}(\partial_\varrho \hat{a}^\varrho)
\end{aligned} \qquad \text{(A4.7)}$$

und

$$\begin{aligned}
&\Delta(x-x') = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4p \, \varepsilon(p^0) \, \delta(p^2 - \varkappa^2) \, e^{ip(x-x')} \\
&D(x-x') = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4k \, \varepsilon(k^0) \, \delta(k^2) \, e^{ik(x-x')}
\end{aligned} \qquad \text{(A4.8)}$$

Die Transformation ins Furry-Wechselwirkungsbild liefert dann

$$\hat{\mathcal{H}}_{I,F}(x) = i\varepsilon \hat{a}_\mu(x)\left(\hat{\varphi}_e^*(x) \overleftrightarrow{\partial^\mu} \hat{\varphi}_e(x) - 2i\varepsilon A_{ext}^\mu(x) \hat{\varphi}_e^*(x) \hat{\varphi}(x)\right) + \varepsilon^2 \hat{a}_\mu(x) \hat{a}^\mu(x) \hat{\varphi}_e^*(x) \hat{\varphi}_e(x) \qquad \text{(A4.9)}$$

und man erhält eine invariante Zerlegung der Feldoperatoren

$$\begin{aligned}
&\hat{\varphi}_e(x) = \hat{\varphi}_e^{(-)}(x) + \hat{\varphi}_e^{(+)}(x) \\
&\hat{\varphi}_e^{(-)}(x) = \sum_\alpha \varphi_{\alpha+}^e(x) \, a_\alpha \quad , \quad \hat{\varphi}_e^{(+)}(x) = \sum_\alpha \varphi_{\alpha-}^e(x) \, b_\alpha^+ .
\end{aligned} \qquad \text{(A4.10)}$$

Die Operatoren $a_\alpha$, $a_\alpha^+$, $b_\alpha$, $b_\alpha^+$ erfüllen die Vertauschungsrelationen von Leiteroperatoren

$$[a_\alpha, a_\beta^+] = [b_\alpha, b_\beta^+] = \delta_{\alpha\beta}, \quad \text{alle anderen} = 0, \tag{A4.11}$$

und die klassischen Felder $\varphi_{\alpha+}^e(x)$, $\varphi_{\alpha-}^e(x)$ bilden ein vollständiges System orthonormierter Lösungen der klassischen Gleichung im äußeren Feld

$$[D_\mu D^\mu - \varkappa^2]\, \varphi_{\alpha\pm}(x) = 0 \quad . \tag{A4.12}$$

Außerdem erhält man die Zerlegung

$$\hat{a}_\mu(x) = \frac{\sqrt{\hbar c}}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{2|\vec{k}|} \{a_\mu(\vec{k}) e^{ikx} + a_\mu^+(k) e^{-ikx}\} \tag{A4.13}$$

$$= \frac{\sqrt{\hbar c}}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\varrho=0}^{3} \int \frac{d^3k}{2|\vec{k}|} \{\varepsilon_\mu^{(\varrho)}(\vec{k}) a_{(\varrho)}(\vec{k}) e^{ikx} + \varepsilon_\mu^{(\varrho)}(\vec{k}) a_{(\varrho)}^+(\vec{k}) e^{-ikx}\}$$

mit

$$a_{(\varrho)}(\vec{k}) = \varepsilon_{(\varrho)}^\nu(\vec{k}) \cdot a_\nu(\vec{k}), \quad a_{(\varrho)}^+(\vec{k}) = \varepsilon_{(\varrho)}^\nu(\vec{k}) a_\nu^+(\vec{k}) \quad . \tag{A4.14}$$

Für die Polarisationsvektoren gilt

$$\varepsilon_\mu^{(\varrho)}(\vec{k}) \cdot \varepsilon^{(\sigma)\mu}(\vec{k}) = g^{\varrho\sigma}, \quad k_\mu \varepsilon^{(i)\mu}(\vec{k}) = 0 \quad \text{für } i = 1,2 \tag{A4.15}$$

und für die Leiteroperatoren

$$[a_\mu(\vec{k}), a_\nu^+(\vec{k}')] = 2|\vec{k}|\, g_{\mu\nu}\, \delta(\vec{k} - \vec{k}')$$

$$[a_{(\varrho)}(\vec{k}), a_{(\sigma)}^+(k')] = 2|\vec{k}|\, g_{\varrho\sigma}\, \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad . \tag{A4.16}$$

Mit dem S-Operator in Störungsentwicklung

$$\hat{S} = T \exp\{-\tfrac{i}{\hbar c} \int d^4x : \hat{\mathcal{H}}_{I,F}(x) :\} \tag{A4.17}$$

erhalten wir das S-Matrixelement für die Bremsstrahlung in erster Ordnung

$$S_{fi}^{(1)} = \langle \beta+, k\lambda; in | \hat{S}^{(1)} | \alpha+; in \rangle = \langle \beta+, k\lambda; in | \hat{S}_{eff}^{(1)} | \alpha+; in \rangle \qquad \text{(A4.18)}$$

mit $\hat{S}_{eff}^{(1)} = -\frac{i}{\hbar c} \int d^4x : \mathcal{H}_{I,F}^{eff}(x) :$

$$\hat{\mathcal{H}}_{I,F}^{eff}(x) = i\varepsilon \hat{a}_\mu(x) \left( \hat{\varphi}_e^*(x) \overleftrightarrow{\partial^\mu} \hat{\varphi}_e(x) - 2i\varepsilon A_{ext}^\mu(x) \hat{\varphi}_e^*(x) \hat{\varphi}_e(x) \right) \qquad \text{(A4.19)}$$

$$: \hat{\mathcal{H}}_{I,F}^{eff}(x) : = i\varepsilon \hat{a}_\mu(x) \left( \hat{\varphi}_e^*(x)^{(+)} \overleftrightarrow{\partial^\mu} \hat{\varphi}_e(x)^{(-)} - 2i\varepsilon A_{ext}^\mu(x) \hat{\varphi}_e^*(x)^{(+)} \hat{\varphi}_e(x)^{(-)} \right).$$

Mit der Wirkung der Feldoperatoren auf die einlaufenden Zustände

$$\hat{\varphi}_e(x)^{(-)} | \alpha+; in \rangle = \varphi_{\alpha+}^e(x) | 0 \rangle \,, \quad \langle \beta+; in | \hat{\varphi}_e^*(x)^{(+)} = \langle 0 | \varphi_{\beta+}^{e*}(x)$$

$$\langle k\lambda; in | \hat{a}_\mu(x) = \langle 0 | \frac{\sqrt{f\hbar c}}{(2\pi)^{3/2}} \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k}) e^{-ikx} \,, \quad \lambda = 1,2 \qquad \text{(A4.20)}$$

ergibt sich dann

$$S_{fi}^{(1)} = \frac{i\sqrt{f}}{\sqrt{\hbar c}} \frac{1}{c} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4x \, \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k}) \, j_{\beta\alpha}^\mu(x) e^{-ikx} \qquad \text{(A4.21)}$$

mit $j_{\beta\alpha}^\mu(x) = -ic \left( \varphi_{\beta+}^{e*}(x) \overleftrightarrow{\partial^\mu} \varphi_{\alpha+}^e(x) - 2i\varepsilon A_{ext}^\mu(x) \varphi_{\beta+}^{e*}(x) \varphi_{\alpha+}^e(x) \right).$

Damit errechnet man die totale Übergangswahrscheinlichkeit

$$T_{tot} = \sum_{\beta+} \sum_{\lambda} \int \frac{d^3k}{2|\vec{k}|} S_{fi}^{(1)*} S_{fi}^{(1)} = \sum_{\beta+} \sum_{\lambda} \int d^4k \, \Theta(k^0) \delta(k^2) S_{fi}^{(1)*} S_{fi}^{(1)} \qquad \text{(A4.22)}$$

$$= -\frac{f}{\hbar c^3} \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{\beta+} \sum_{\lambda} \int d^4k \, \Theta(k^0) \delta(k^2) \int d^4x \, d^4x' \, \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k}) j_{\beta\alpha}^{*\mu}(x) \varepsilon_\nu^{(\lambda)}(\vec{k}) j_{\beta\alpha}^\nu(x') e^{ik(x-x')}.$$

Mit der Vollständigkeitsrelation für die Polarisationsvektoren

$$\sum_{\lambda=1}^{2} \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k}) \, \varepsilon_\nu^{(\lambda)}(\vec{k}) = g_{\mu\nu} \qquad \text{(A4.23)}$$

erhalten wir schließlich

$$T_{tot} = -\frac{f}{\hbar c^3} \sum_{\beta\alpha} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k\, \Theta(k^0)\, \delta(k^2)\, j^*_{\mu(\beta\alpha)}(k)\, e^{ikx}\, j^{\mu}_{(\beta\alpha)}(x')\, e^{-ikx'}$$

$$= -\frac{f}{\hbar c^3} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k\, \Theta(k^0)\, \delta(k^2)\, |j(k)|^2 \qquad \text{(A4.24)}$$

mit $|j(k)|^2 = \sum_{\beta\alpha} j^*_{\mu(\beta\alpha)}(k)\, j^{\mu}_{(\beta\alpha)}(k)$, $j^{\mu}_{(\beta\alpha)}(k) = \int d^4x\, j^{\mu}_{(\beta\alpha)}(x)\, e^{-ikx}$

und somit (vergl. Kapitel 6)

$$P^{\mu}_{QT} = \frac{f}{c^3} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k\, \Theta(k^0)\, \delta(k^2)\, k^{\mu}\, |j(k)|^2 \quad . \qquad \text{(A4.25)}$$

Literatur

BECKER, W./MITTER, H., J.Phys.A:Math.Gen. 9, 2171 (1976)

BEERS, B./NICKLE, H.H., J.Math.Phys. 13, 1592 (1972)

BEERS, B./NICKLE, H.H., J.Phys.A: Gen.Phys. 5, 1658 (1972)

BIAŁYNICKI-BIRULA, I./BIAŁYNICKA-BIRULA, Z., Phys.Rev. A 8, 3146 (1973)

BJØRKEN, J.D./KOGUT, J.B./SOPER, D.E., Phys.Rev. D 3, 1382 (1971)

BROWN, L.S./KIBBLE, T.W.B., Phys.Rev. 133, A 705 (1964)

CHAKRABARTI, A., Nuovo Cimento 56A, 604 (1968)

DAWSON, J.F./FRIED,Z.,Phys.Rev. D1, 3363 (1970)

DIRAC, P.A.M., Proc.Camb.Phil.Sci. 29, 389 (1933)

DIRAC, P.A.M., Rev.Mod.Phys. 21, 392 (1949)

DIRAC, P.A.M., Canad.J.Math. 2, 129 (1950)

DIRAC, P.A.M.: Lectures on Quantum Mechanics, New York (1964)

EBERLY, J.H. in Progress in Optics (ed. WOLF, E.) Vol. VII (1968)

EBERLY, J.H./SLEEPER, A., Phys.Rev. 176, 1570 (1968)

ERBER, T./WHITE, D./LATAL, H.G.,Acta Phys.Austriaca 44, 315 (1976)

ERBER, T./WHITE, D./LATAL, H.G.,Acta Phys.Austriaca 45, 29 (1976)

ERDÉLYI,A. et al.: Higher Transcendental Functions, Vol. 2,
New York (1953)

FRANTZ, L.M., Phys.Rev. 139, B 1326 (1965)

FRIED, Z. /EBERLY, J.H., Phys.Rev. 136, B 871 (1964)

FRIED, Z. /BAKER, A./KORFF, D., Phys.Rev. 151, 1040 (1966)

GOLDMAN, I.I., Phys.Lett. 8, 103 (1964)

HANSON, A./REGGE, T./TEITELBOIM, C.: Constrained Hamiltonian System. Acad.Naz.dei Lincei, Rom (1976)

JACKSON, J.D.: Classical Electrodynamics, 2.ed. New York/ London/Sydney/Toronto (1975)

JANNER, A./JANSSEN, T., Physica 60 , 292 (1972)

JAUCH, J.M./ROHRLICH, F.: The Theory of Photons and Electrons, 2.ed., New York/Heidelberg/Berlin (1976)

LEUTWYLER, H./STERN, J., Ann.Phys. 112, 94 (1978)

LANDAU, L.D./LIFSCHITZ, E.M.: Klassische Feldtheorie, 6. Aufl. Berlin (1973)

KIBBLE, T.W.A., Phys.Rev. 138, B 740 (1965)

KIBBLE, T.W.A. in Cargèse Lectures in Physics (ed. LÉVY, M.), Gordon and Breach, New York (1968)

KOGUT, J.B./SOPER, E.S., Phys.Rev. D 1, 2901 (1970)

KOHLER, R.H., Phys.Rev. 151, 165 (1966)

KUPERSZTYCH, J., Nuovo Cimento 31B, 1 (1976)

KUPERSZTYCH, J., Phys.Rev. D 17, 629 (1978)

MEYER, J.W., J.Math.Phys. 11, 312 (1970)

MITTELSTAEDT, P.: Klassische Mechanik, Mannheim (1970)

MITTER, H., Acta Phys.Austriaca, Suppl. 14, 397 (1975)

NEVILLE, R.A., Ph.D. thesis, Syracuse University (1968), unveröff.

NEVILLE, R.A./ROHRLICH, F., Phys.Rev. D3, 1692 (1971)

RICHARD, J.L., Nuovo Cimento 8A, 485 (1972)

ROHRLICH, F., Phys.Rev. 80, 666 (1950)

ROHRLICH, F.: Classical Charged Particles, Reading, Mass. (1965)

ROHRLICH, F., Acta Phys.Austriaca 32, 87 (1970)

ROHRLICH, F., Acta Phys.Austriaca Suppl. 8, 277 (1971)

SALETAN, E.J./CROMER, A.H.: Theoretische Mechanik, München/ Frankfurt (1974)

SARCHIK, E.S./SCHAPPERT, G.T., Phys.Rev. D1, 2738 (1970)

SCHWINGER, J., Phys.Rev. 75, 1912 (1949)

SCHWINGER, J., Phys.Rev. 82, 664 (1951)

SUDARSHAN, E.C.G./MUKUNDA, N.: Classical Dynamics, New York/ London/Sydney/Toronto (1974)

TEN EYCK, J.H./ROHRLICH, F., Phys.Lett. 46B (1973)

TEN EYCK, J.H./ROHRLICH, F., Phys.Rev. D9, 2237 (1974)

THIRRING, W.: Principles of Quantum Electrodynamics, New York/ London (1958)

THIRRING, W.: Lehrbuch der Mathematischen Physik Bd. 1: Klassische Dynamische Systeme, Wien/New York (1977)

VOLKOV, D.M., Z.Physik 94, 250 (1935)

WALTZ, R.E./MANLEY, O.P., Phys.Fluids 21 (1978)

ZELDOVICH, Y.B. JETP 51, 1492 (1966)

An dieser Stelle möchte ich meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr. H. Mitter danken für die Anregung zu dieser Arbeit, für sein kontinuierliches Interesse und für seine Ermutigungen. Den Mitarbeitern des Instituts für Theoretische Physik der Universität Graz danke ich für ihre herzliche Gastfreundschaft. Herrn Prof. Dr. H. G. Latal verdanke ich wertvolle Tips. In Tübingen gilt mein Dank vor allem Herrn Prof. Dr. W. Dittrich und Herrn Dr. W. Becker für wertvolle Diskussionen und den nötigen Rückhalt. Herrn Dr. G. John verdanke ich wertvolle gruppentheoretische Hinweise. Für die so wichtigen Diskussionen am Detail bin ich Herrn Dipl. Phys. R. Meckbach besonders dankbar.
Last not least bedanke ich mich herzlich bei Frl. C. Kienle für die Anfertigung der Reinschrift.

Diese Arbeit wurde zum Teil von der Graduierten-Förderung unterstützt.

LEBENSLAUF

Am 7. November 1948 wurde ich in Sigmaringen als Sohn der Hausfrau Ilse Holtmann, geborene Berz, und des Bauingenieurs Heinrich Holtmann geboren. Ich besuchte von 1955 bis 1959 die Grundschule Sigmaringen und trat am 7. April 1959 in das dortige Staatliche Gymnasium ein, wo ich am 1. Juli 1967 die Reifeprüfung ablegte. Nach Ableistung der Wehrpflicht begann ich am 10. April 1969 an der Universität Tübingen Mathematik und Physik zu studieren. Bei Prof. Dr. H. Mitter fertigte ich eine Zulassungsarbeit an über "Quantentheorie in der Sekundarstufe II. Untersuchung einiger didaktisch attraktiver Darstellungen." und schloß mein Studium am 15. Juli 1974 mit dem Staatsexamen in Physik ab.

Von Mai 1975 an arbeitete ich im Institut für Theoretische Physik der Universität Tübingen unter Anleitung von Prof. Dr. H. Mitter an meiner Dissertation "Separation der Quanteneffekte bei der Compton-Streuung in intensiven realistischen Laser-Pulsen." Die Arbeit wurde im Juni 1981 abgeschlossen. In den Zeitraum der Promotion fiel eine dreijährige Mitarbeit in dem hochschul- und mediendidaktischen Forschungsprojekt CUS (Computer-unterstützte Simulationen im naturwissenschaftlichen Hochschulunterricht) beim Zentrum für neue Lernverfahren der Universität Tübingen und eine eineinhalbjährige Tätigkeit als nebenberuflicher Lehrer an der Theodor Heuss-Schule Reutlingen.

Meine akademischen Lehrer waren:

Baumann, Becker, Beekmann, Betten, Bloch, Cofman, Dembowski, Dittrich, Elwert, Fahrenbach, v. Freytag gen. Löringhoff, Gölz, Gönnenwein, Grandy, Großer, Hartmann, Hewers, Höhn, Koschmieder, Kowitz, Kramer, Krüger, Kupisch, Lenz, Mack, Mertens, Michler, Mitter, Möllenstedt, Mühle, Mühleisen, Pfister, Plaumann, Radbruch, Rex, Schmid, Schramm, Schubring, Schulz, Simon, Sommer, Speidel, Stumpf, Wagenschein, Wahl, Walter, Wolf, Wolff.

Druck und Gesamtherstellung:
H. Hummel, Herderstraße 74
7410 Reutlingen, Telefon: 07121/230706